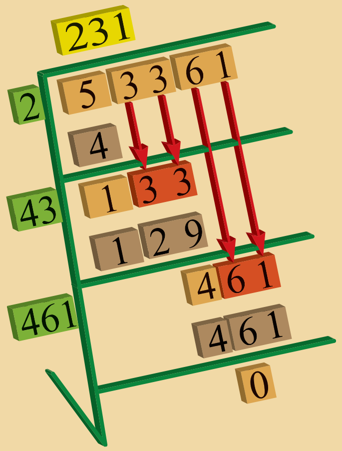
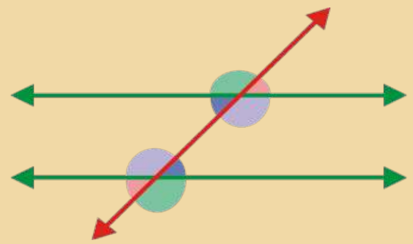
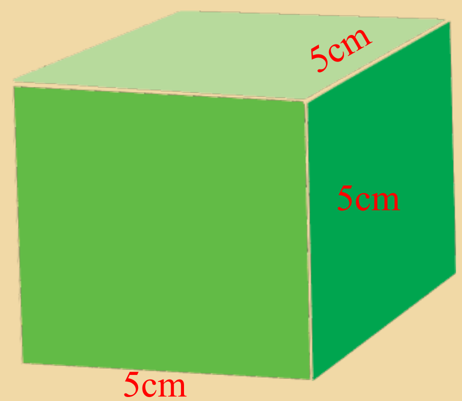
وزارت معارف

ریاضی

صنف ۷

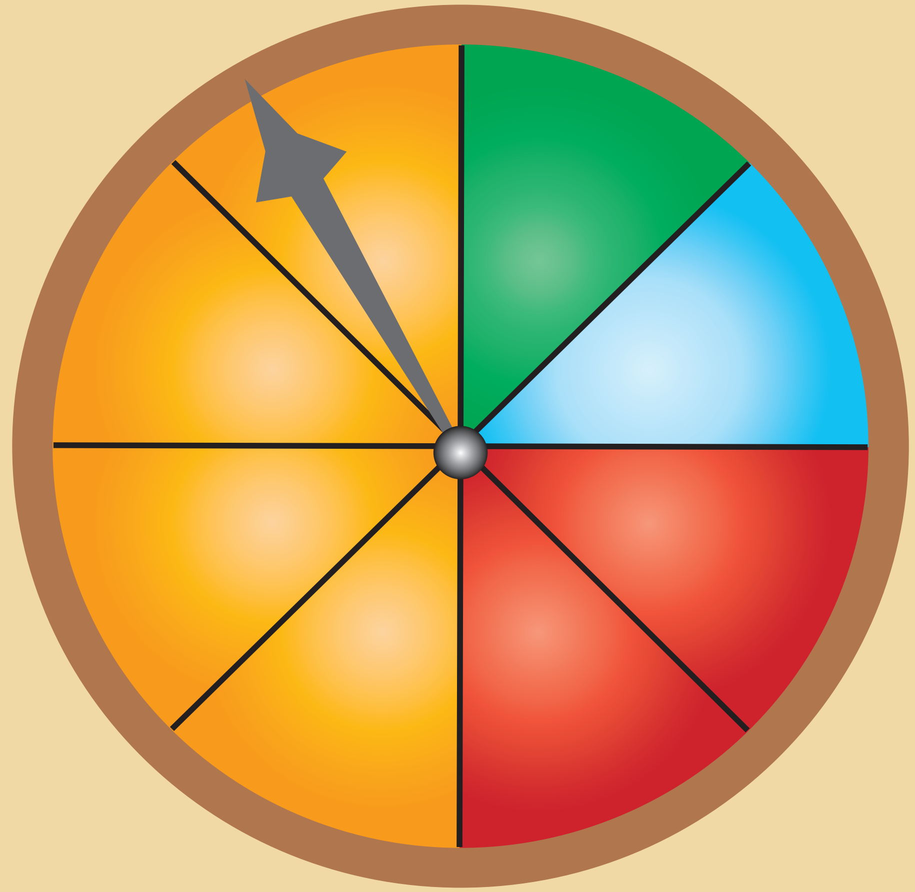








ریاضی صنف ۷



۱۳۹۸ هـ. ش.



سرود ملی

دا وطن افغانستان دی
کور د سولې کور د تورې
دا وطن د ټولو کور دی
د پښتون او هزاره وو
ورسره عرب، گوجر دي
براهوي دي، قزلباش دي
دا هېواد به تل ځلیږي
په سینه کې د آسیا به
نوم د حق مو دی رهبر

دا عزت د هر افغان دی
هر بچی یې قهرمان دی
د بلوڅو د ازبکو
د ترکمنو د تاجکو
پامیریان، نورستانیان
هم ایماق، هم پشه یان
لکه لمر پر شنه آسمان
لکه زړه وي جاویدان
وایو الله اکبر وایو الله اکبر

بسم الله الرحمن الرحیم

ریاضی

صنف ۷

۱۳۹۸

هـ . ش .

مشخصات کتاب

مضمون: ریاضی

مؤلفان: گروه مؤلفان کتاب‌های درسی دیپارتمنت ریاضی نصاب تعلیمی

ویراستاران: اعضای دیپارتمنت ویراستاری و ایدیت زبان دری

صنف: هفتم

زبان متن: دری

انکشاف دهنده: ریاست عمومی انکشاف نصاب تعلیمی و تالیف کتب درسی

ناشر: ریاست ارتباط و آگاهی عامۀ وزارت معارف

سال چاپ: ۱۳۹۸ هجری شمسی

مکان چاپ: کابل

چاپ‌خانه:

ایمیل آدرس: curriculum@moe.gov.af

پیام وزیر معارف

اقرأ باسم ربک

سپاس و حمد بیکران آفریدگار یکتایی را که بر ما هستی بخشید و ما را از نعمت بزرگ خواندن و نوشتن برخوردار ساخت، و درود بی‌پایان بر رسول خاتم- حضرت محمد مصطفی ﷺ که نخستین پیام الهی بر ایشان «خواندن» است.

چنانچه بر همه‌گان هویداست، سال ۱۳۹۷ خورشیدی، به نام سال معارف مسمی گردید. بدین ملحوظ نظام تعلیم و تربیت در کشور عزیز ما شاهد تحولات و تغییرات بنیادینی در عرصه‌های مختلف خواهد بود؛ معلم، متعلم، کتاب، مکتب، اداره و شوراهای والدین، از عناصر شش‌گانه و اساسی نظام معارف افغانستان به شمار می‌روند که در توسعه و انکشاف آموزش و پرورش کشور نقش مهمی را ایفا می‌نمایند. در چنین برهه سرنوشت‌ساز، رهبری و خانوادهٔ بزرگ معارف افغانستان، متعهد به ایجاد تحول بنیادی در روند رشد و توسعه نظام معاصر تعلیم و تربیت کشور می‌باشد.

از همین‌رو، اصلاح و انکشاف نصاب تعلیمی از اولویت‌های مهم وزارت معارف پنداشته می‌شود. در همین راستا، توجه به کیفیت، محتوا و فرایند توزیع کتاب‌های درسی در مکاتب، مدارس و سایر نهادهای تعلیمی دولتی و خصوصی در صدر برنامه‌های وزارت معارف قرار دارد. ما باور داریم، بدون داشتن کتاب درسی باکیفیت، به اهداف پایدار تعلیمی در کشور دست نخواهیم یافت.

برای دستیابی به اهداف ذکرشده و نیل به یک نظام آموزشی کارآمد، از آموزگاران و مدرسان دلسوز و مدیران فرهیخته به‌عنوان تربیت کننده‌گان نسل آینده، در سراسر کشور احترامانه تقاضا می‌گردد تا در روند آموزش این کتاب درسی و انتقال محتوای آن به فرزندان عزیز ما، از هر نوع تلاشی دریغ نورزیده و در تربیت و پرورش نسل فعال و آگاه با ارزش‌های دینی، ملی و تفکر انتقادی بکوشند. هر روز علاوه بر تجدید تعهد و حس مسؤولیت پذیری، با این نیت تدریس راآغاز کنند، که در آیندهٔ نزدیک شاگردان عزیز، شهروندان مؤثر، متمدن و معماران افغانستان توسعه یافته و شکوفا خواهند شد.

همچنین از دانش آموزان خوب و دوست داشتنی به مثابه ارزشمندترین سرمایه‌های فردای کشور می‌خواهم تا از فرصت‌ها غافل نبوده و در کمال ادب، احترام و البته کنجکاوی علمی از درس معلمان گرامی استفادهٔ بهتر کنند و خوشه چین دانش و علم استادان گرامی خود باشند.

در پایان، از تمام کارشناسان آموزشی، دانشمندان تعلیم و تربیت و همکاران فنی بخش نصاب تعلیمی کشور که در تهیه و تدوین این کتاب درسی مجدانه شبانه روز تلاش نمودند، ابراز قدردانی کرده و از بارگاه الهی برای آن‌ها در این راه مقدس و انسان‌ساز موفقیت استدعا دارم.

با آرزوی دستیابی به یک نظام معارف معیاری و توسعه یافته، و نیل به یک افغانستان آباد و مترقی دارای شهروندان آزاد، آگاه و مرفه.

دکتور محمد میرویس بلخی

وزیر معارف

فهرست

صفحه

فصل اوّل

سِت





مفهوم ست (Concept of a Set)



آیا تا به حال تصمیم گرفته اید که عضو یکی از تیم‌های ورزشی مکتب خود شوید؟

فعالیت

تصور کنید که در صنف هفتم یک مکتب 10 شاگرد وجود دارند و آن‌ها می‌خواهند که در سه تیم والیبال، فوتبال و باسکتبال مکتب خود شامل شوند. در تیم والیبال 5 نفر و در تیم فوتبال 7 نفر عضو می‌شود و در تیم باسکتبال هیچ شاگردی شرکت نکرده باشند.

- چه تعداد شاگردان در تیم والیبال و هم در تیم فوتبال ثبت نام کرده اند؟
- چه تعداد شاگردان در هر یک از تیم‌های ورزشی فوق ثبت نام کرده اند؟

هر یک از تیم‌های فوق یک خصوصیت مشترک دارند یا به عبارت دیگر هر یک از این تیم‌ها یک مجموعه (ست) را تشکیل می‌دهند.

A

احمد	حسن	محمود
نادر	زلمی	قاسم
صفت الله		عزت الله
دین محمد		عطاءالله

معمولاً ست‌ها را به حروف کلان زبان انگلیسی چون $A,B,C...X,Y,Z$ نشان می‌دهند و عناصر ست توسط حروف کوچک مثل $a,b,c...x,y,z$ را در داخل علامت { } می‌نویسند. عناصر ست توسط علامت «،» از یکدیگر جدا می‌شوند.

مثال اول: اگر ست شاگردان صنف 7 را، ست A، ست تیم والیبال را B، ست تیم فوتبال را C و ست تیم باسکتبال را D بنامیم؛ هر یک از این ست‌ها به‌طور زیر نشان داده می‌شود:

A={احمد، حسن، صفت الله، قاسم، عزت الله، نادر، عطاءالله، دین محمد، محمود، زلمی}

B={احمد، حسن، قاسم، زلمی، محمود}

C={احمد،قاسم، صفت الله، نادر، دین محمد، عطاء الله، عزت الله}

ست D خالی است؛ زیرا در تیم باسکتبال هیچ شاگردی اشتراک نکرده است. $D=\{\ \}$

ستی که هیچ عنصر نداشته‌باشد، به نام ست خالی یاد می‌شود و به علامت $\emptyset$ و یا $\{\ \}$ نشان داده می‌شود.

ست‌ها را می‌توانیم توسط اشکال مختلف نشان دهیم که به نام **دیاگرام وین** یاد می‌شوند؛ طور مثال می‌توان ست‌های A, B و C را توسط وین دیاگرام طور زیر نشان دهیم.

A ست شاگردان صنف 7 — B ست تیم والیبال — C ست تیم فوتبال



فعالیت

- ستی را بنویسید که عناصر آن، لوازم و سامان یک بکس هندسی باشند.
- یک ست 5 عنصری را بنویسید که عناصر آن نام‌های حیوانات اهلی باشند.
- ست 6 عنصری را بنویسید که عناصر آن نام‌های میوه‌های تازه باشند.

مثال دوم: اگر ست اعداد طاقی را که از 10 کوچک‌تر باشد O، و ست اعداد جفتی را که از 10 کوچک‌تر باشد E بنامیم، در این صورت:

$$O = \{1,3,5,7,9\}$$
$$E = \{2,4,6,8\}$$

هر دستهٔ مشخص شده از اشیا را یک ست و اشیای آن را عناصر (عضو) ست می‌نامند.

تمرین

1- ستی را بنویسید که عناصر آن نام روزهای هفته باشند.
2- ستی را بنویسید که عناصر آن نام ماه‌های سال باشند.
3- ست حروف صدادار زبان انگلیسی را بنویسید.
4- ستی را بنویسید که عناصر آن نام‌های ولایات افغانستان باشند.
5- ستی را بنویسید که عناصر آن انسان‌هایی باشند که قدآن‌ها 3 متر است.

عناصر یک ست(Members of a Set)



آیا می‌توانید بگویید که بز در ست حیوانات اهلی شامل است یا خیر؟

در مثال تیم‌های ورزشی، صفت الله عضو تیم فوتبال بود. او یک عنصر از ست C می‌باشد و این طور نشان داده می‌شود: $C \in$ صفت الله

چون زلمی عنصر(عضو) تیم فوتبال (ست C) نیست، این طور نشان داده می‌شود:

$C \notin$ زلمی (زلمی عنصر ست C نیست و یا عنصر ست تیم فوتبال نیست.)

اما زلمی عضو تیم والیبال یا عنصر ست B بوده؛ بنابراین:

$B \in$ زلمی (زلمی‌عنصر ست B است)

فعالیت

ست‌های زیر را در نظر بگیرید:

$A = \{a, b, c, d, e\}$

$B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

- آیا b عنصر ست B می‌باشد؟ در مورد عضویت d در ست B چه می گویید؟
- آیا 5 عنصر ست A است؟ آیا 5 عنصر ست B است؟
- ست A چند عنصر دارد؟ ست B چند عنصر دارد؟

مثال اول: ست‌های A و B را در نظر می گیریم طوری که

A={اعداد جفت یک‌رقمی }

B={اعداد یک‌رقمی که بر 3 قابلیت تقسیم دارند}

- ست‌های A و B را با عناصرشان بنویسید.
- ست‌های A و B را به وسیلهٔ دیاگرام وین نشان دهید.

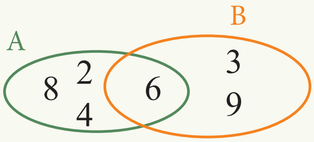
حل

مشاهده می‌شود که:

$A=\{2,4,6,8\}$

$B=\{3,6,9\}$

$3\in B$	$2\in A$
$9\in B$	$4\in A$
$6\in B$	$8\in A$
$4\notin B$	$6\in A$



مثال دوم: درستی یا نادرستی رابطه‌های زیر را تعیین کنید.

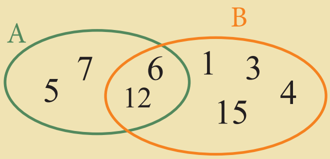
a) 

b) $f\in\{a,b,c,d,e\}$

حل: a درست است؛ اما b درست نیست.

عنصر بودن و یا شامل بودن یک عنصر در یک ست با علامت ($\in$) و عنصر نبودن در یک ست با علامت ($\notin$) نشان داده می‌شود.

تمرین



1- خانه‌های خالی زیر را بر اساس شکل فوق ست‌های A و B پر کنید.

$12\ \square\ A$ $\qquad 6\ \square\ B$ $\qquad 5\in\square$

$4\ \square\ A$ $\qquad 3\notin\square$ $\qquad 7\notin\square$

2- اگر $A=\{2,4,6,8\}$ و $B=\{1,3,5,7,9\}$ باشد، کدام یک از عبارات زیر درست و کدام یک نادرست است؟

$5\in A$ ، $4\in A$ ، $7\notin A$ ، $9\in B$ ، $8\notin B$

$10\in A$ ، $11\in B$ ، $1\notin A$ ، $2\in A$ ، $3\notin B$

3- اگر $A=\{1,2,3,4\}$ و $B=\{3,4,5,6\}$ باشد، کدام یک از عبارات زیر درست و کدام یک نادرست است؟

$4\in A \qquad 5\in B \qquad 5\in A \qquad 6\notin A$

$3\in A \qquad 2\in B \qquad 2\notin A \qquad 6\in A$

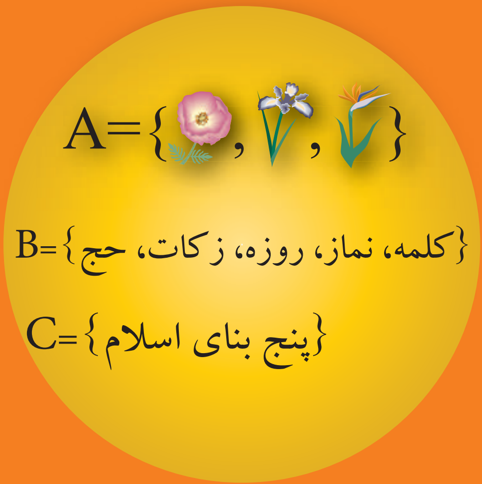
4- درستی و نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

$5\notin\{2,4,6,8,10\}$ ، $8\in\{3,5,7,8,9,11,13\}$

$g\notin\{a,b,c,d,e\}$ ، $10\in\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

طرق نوشتن یک ست

یک ست را به چند روش می‌توان نشان داد؟



به طور عموم ست را به دو روش نشان می‌دهند:

1- تمام عناصر یک ست و یا تصاویر عناصر به این روش در بین علامت ست { } قرار می‌گیرند طوری که در بین عناصر علامت (,) نوشته می‌شود. این روش را روش تفصیلی یا روش لست کردن عناصر (Tabulation Method) می‌گویند.

مثال اول: A={  } ، B = {احمد، حسن، قاسم، زلمی، محمود}

$C = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ ، $D = \{a,b,c,d,e\}$ و $E = \{1,2,3,4,...,500\}$

چون عناصر ست E زیاد می‌باشد، بدین سبب سه نقطهٔ (...) این مفهوم را دارد که اعداد الی 500 دوام دارند.

2- ست را به اساس خاصیت‌های مشترک عناصر در یک جمله مشخص می‌کنند. در این طریقه، نوشتن علامت { } ضروری نیست. این روش را روش اجمالی یا روش توصیفی (Description Method) می‌نامند.

مثال دوم: ست B و ست E مثال اول را توسط طریقهٔ اجمالی طور زیر می‌نویسیم:

B = ست نام‌های شاگردان تیم والیبال صنف 7

E = ست 500 عدد طبیعی پیهم که با 1 شروع می‌شوند

$P = \{2,3,5,7,11,...\}$ را به شکل زیر نشان می‌دهیم

P = ست اعداد اولیه

مثال سوم: اگر {کلمهٔ طیبه , نماز , روزه , زکات , حج}=K باشد، ست K را توسط طریقهٔ اجمالی به شکل زیر نشان می‌دهیم:

$K =$ ست پنج بنای اسلام

فعالیت

A = ست 8 حرف اول زبان انگلیسی

B = ست اعداد طبیعی کوچک‌تر از 10 و بزرگ‌تر از 2

C = ست مضرب‌های عدد 3 کمتر از 20

ست‌های A ، B و C را توسط روش لست کردن عناصر بنویسید.

مثال چهارم: اگر $A=\{a,e,i,o,u\}$ و $B=\{a,b,c,d,e\}$ باشد. این ست‌ها را به روش اجمالی یا توصیفی بنویسید.

حل: $A=$ ست حروف صدادار زبان انگلیسی ، $B=$ ست پنج حرف اول زبان انگلیسی

تمرین

1- ست‌های زیر را به روش لست کردن عناصر بنویسید.

B = ست نام روزهای یک هفته

A = ست نام ماه‌های یک سال

E = ست رنگ‌های بیرق افغانستان

2- ست‌های زیر را به طریقهٔ توصیفی (تشریحی) بنویسید.

$A=\{a,e,i,o,u\}$

B = {سیاه، سرخ، سبز}

$C=\{1,3,5,7,9\}$

$D=\{2,4,6,8\}$

$E=\{1,2,3,4,5\}$

3- ست‌های زیر را به طریقهٔ لست کردن عناصر بنویسید.

$K=$ ست اعداد طبیعی جفت یک‌رقمی

$L=$ ست اعداد طبیعی طاق یک‌رقمی

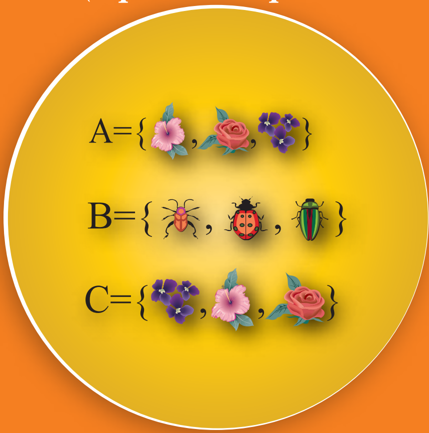
$T=$ ست مضرب‌های عدد هفتم

$C=$ ست شاگردان تیم فوتبال صنف هفتم

$B=$ ست شاگردان تیم والیبال صنف هفتم

$A=$ ست شاگردان صنف هفتم

ست‌های مساوی و ست‌های معادل (Equal and Equivalent Sets)



آیا می‌توان گفت که ست‌های A و C چه رابطه‌یی با هم دارند و نیز در بین ست‌های A و B چه رابطه‌یی موجود است؟

فعالیت

اگر ست $A=\{1,2,3,4,5,7,8\}$ باشد، ست‌های B و C را از روی ست A طوری بسازید که:

- B ست اعداد جفت یک‌رقمی باشد.
- C ست اعداد یک‌رقمی یی که بر 2 قابلیت تقسیم را دارند.
- در بارهٔ ست‌های B و C چه گفته می توانید؟

تعریف: ست‌های A و B را ست‌های مساوی می‌نامند، هرگاه تعداد عناصر هر دو ست با هم مساوی و یکسان باشند. به عبارت دیگر، اگر تمام عناصر ست A در ست B و تمام عناصر ست B در ست A شامل باشند، در این صورت می نویسیم که $A=B$ می‌باشد.

مثال اول: اگر $A=\{1,2,6\}$ و $B=\{1,1,2,2,6\}$ باشد متوجه باشید که: $A=B$ می‌باشد.

متوجه باید بود که $\{5,3,2,7\}=\{2,3,5,7\}$ می‌باشد. ست‌های $A=\{1,2\}$ و $B=\{2,3\}$ را در نظر بگیرید. این دو ست با هم مساوی نیستند؛ زیرا که $1\in A$، ولی $1\notin B$

تکرار عناصر یک ست و یا تبدیل کردن جاهای عناصر یک ست، هیچ کدام تغییری در ست وارد نمی کند.

فعالیت

دو ست A و B را در نظر بگیرید: $A = \{a,b,c,d\}$ و $B = \{5,4,7,8\}$

- تعداد عناصر هر یک از ست A و B چند است؟
- آیا a عنصر ست B است؟
- آیا ست A با ست B مساوی است، چرا؟

مثال دوم: اگر $A = \{$■,▲,●$\}$ و $B = \{8,10,12\}$ باشند، آیا دو ست A و B با هم معادل اند؟

چون تعداد عناصر ست A سه و تعداد عناصر ست B نیز سه می‌باشند؛ پس ست‌های A و B با هم معادل اند.

مثال سوم: آیا ست اعداد طاق یک‌رقمی و ست اعداد جفت یک‌رقمی با هم معادل اند؟

حل: $A = \{1,3,5,7,9\}$ $\quad$ $B = \{2,4,6,8\}$

چون تعداد عناصر ست A مساوی به پنج و تعداد عناصر ست B مساوی به چهار می‌باشد، A و B با هم معادل نیستند.

اگر عناصر ست‌های A و B یکسان باشند به نام ست‌های مساوی و اگر صرف تعداد عناصر شان با هم مساوی باشند به نام ست‌های معادل (Equivalent Sets) یاد می‌شوند.

1- ست‌های $A = \{1,2,3,4,5\}$ و $B = \{a,b,c,d,e\}$ را در نظر بگیرید:

تمرین

- آیا ست A مساوی با ست B می‌باشد؟
- آیا ست A معادل با ست B می‌باشد؟

2- ست‌های $A = \{1,7,8,9\}$ و $B = \{9,8,1,7,9\}$ را در نظر بگیرید:

- آیا ست A با ست B مساوی است؟

3- کدام یک از عبارات زیر درست و کدام یک نادرست است؟

- اگر $A = \{5,6,8,11\}$ و $B = \{11,11,6,5,8\}$ باشد، پس $A = B$ است.
- اگر $C = \{$شنبه، یک‌شنبه، دو شنبه$\}$ و $D = \{x,y,z\}$ باشد، ست C با ست D معادل می‌باشد.
- اگر $M = \{2,4,6\}$ و $N = \{6,4,6,2\}$ باشد $M \neq N$ است.

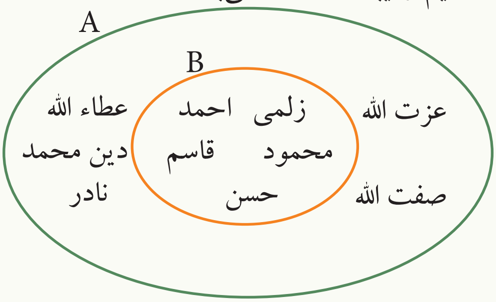
ست فرعی(Subset)



اعضای خانوادهٔ شما اهل یک شهر یا قریه استند،
اهالی شهر یا قریهٔ شما از مردمان افغانستان استند،
مردم افغانستان .... .

فعالیت

A ست شاگردان صنف 7 و B ست شاگردان تیم والیبال صنف 7 می‌باشد.



- با توجه به شکل فوق عناصر ست‌های A و B را بنویسید.
- بین عناصر ست A و B چه رابطه‌یی وجود دارد؟ توضیح دهید.

دیده می‌شود که هر عنصر ست B عنصر ست A نیز می‌باشد، در این‌صورت می گوییم که ست B یک ست فرعی ست A بوده که این طور نشان داده می‌شود: $B \subset A$
این ⊂علامت ست فرعی می‌باشد. از طرف دیگر چون هر عنصر ست A در ست B موجود نیست؛ پس ست A، ست فرعی B نمی‌باشد و این طور نشان داده می‌شود: $A \not\subset B$

مثال اول: ست‌های زیر را در نظر می گیریم:

A = {احمد، محمود، زهرا، مریم}
B = {داوود، قاسم، احمد، مریم}
C = {مریم، احمد}

پس می توان گفت که: $A \not\subset B$ ، $B \not\subset A$ ، $C \subset B$ ، $C \subset A$

و نیز می توان گفت که $A \subset A$ می‌باشد؛ یعنی هر ست، ست فرعی خودش می‌باشد.

اگر هر عنصر ست A در ست B و برعکس هر عنصر ست B در ست A شامل باشد، می گوییم که این دو ست با همدیگر مساوی اند و می‌توانیم بنویسیم:

$A \subset B$ و $B \subset A \Rightarrow A = B$

فعالیت

ست‌های $A = \{2,5,6,7\}$ ، $B = \{5,7\}$ ، $E = \{7,6,2,5\}$ و $D = \{1,2,5,6\}$ داده شده اند.

- آیا $A \subset B$ می‌باشد؟
- آیا ست E ست فرعی A می‌باشد؟
- آیا $A \subset D$ می‌باشد؟

مثال دوم: اگر $A = \{2,4,6,8\}$ باشد، کدام یک از ست‌های زیر ست فرعی A می‌باشد؟

$B = \{1,2,4\}$ ، $E = \{\ \}$

حل: $A \subset E$ است؛ زیرا ست خالی ست فرعی هر ست شده می تواند، و $A \not\subset B$ (ست B ست فرعی A نیست؛) زیرا $1 \in B$ است؛ ولی $1 \notin A$.

اگر تمام عناصر ست B در ست A شامل باشند، ست B یک ست فرعی ست A می‌باشد که این طور نشان داده می‌شود $B \subset A$.

تمرین

1- هر گاه $A = \{1,2,3,4\}$ باشد، ست‌های C, B و D را به شکل تفصیلی بنویسید.

- B ستی باشد که همه عناصر آن اعداد جفت باشند.
- C ستی باشد که همه عناصر آن اعداد طاق باشند.
- D ستی باشد که همه عناصر آن اعداد بزرگتر از چهار باشند.

2- آیا هر ست، ست فرعی خودش می‌باشد؟

3- کدام یک از ست‌های زیر ست فرعی ست $C = \{2,4,6,8\}$ می‌باشد؟

$A = \{1,2,4\}$ ، $B = \{\ \}$

4- کدام یک از ست‌های زیر ست فرعی ست $C = \{1,2,3,4,5\}$ می‌باشد؟

$A = \{3,5,7\}$ ، $B = \{1,2,3,4,5\}$

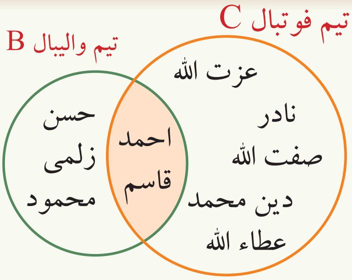
5- کدام یک از ست‌های زیر با ست $C = \{1,2,3,4\}$ مساوی می‌باشد؟

$A = \{1,2,3\}$ ، $B = \{4,3,2,1\}$

تقاطع ست‌ها (Intersection of Sets)



آیا از مثال اول درس اول گفته می‌توانید که کدام شاگردان صنف هفتم هم در تیم والیبال و هم در تیم فوتبال اشتراک دارند؟



طوری که دیده می‌شود، احمد و قاسم در هر دو تیم والیبال و فوتبال اشتراک دارند. تقاطع دو ست B و C عبارت از ستی است که عناصر آن احمد و قاسم بوده، این گونه نشان داده می‌شود.

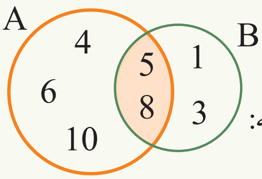
$B \cap C = \{\text{احمد، قاسم}\}$ که $\cap$ علامت تقاطع می‌باشد.

$B \cap C = \{\text{حسن, زلمی, محمود, احمد, قاسم}\} \cap \{\text{احمد, قاسم, عزت الله, نادر, صفت الله, دین محمد, عطاء الله}\}$
$= \{\text{احمد, قاسم}\}$

مثال اول: هرگاه ست‌های $A = \{4,5,6,8,10\}$ و $B = \{3, 5,8,1\}$ داده شده باشند، $A \cap B$ و $B \cap A$ را دریابید.

حل: $A \cap B = \{4,5,6,8,10\} \cap \{3, 5,8,1\} = \{5,8\}$

$B \cap A = \{3, 5,8,1\} \cap \{4,5,6,8,10\} = \{5,8\}$



در نتیجه طوری که در شکل نیز مشاهده می‌شود، می‌توان گفت که:

$A \cap B = B \cap A = \{5,8\}$

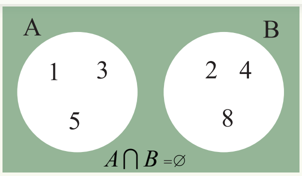
فعالیت

هرگاه ست‌های $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ ، $B = \{1,2,7,8\}$ و $C = \{2,3,7,8,9\}$ داده شده باشند، $A \cap B$ ، $B \cap C$ و $(A \cap B) \cap C$ را دریافت نموده و توسط دیاگرام وین نشان دهید.

مثال دوم: دو ست A و B را قرار زیر در نظر بگیرید.

$A = \{1,3,5\}$ $\qquad$ $B = \{2,4,8\}$

دیده می‌شود که: $A \cap B = \{1,3,5\} \cap \{2,4,8\} = \varnothing$



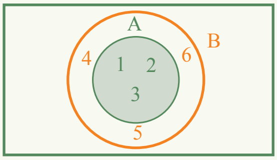
ست‌هایی را که هیچ عنصر مشترک ندارند ست‌های غیر مشترک(Disjoint Sets) می‌نامند.

تقاطع دو ست A و B در صورتی که تمام عناصر A در B شامل باشند، با ست A برابر است.

مثال سوم: اگر $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{1,2,3,4,5,6\}$ باشد $A\bigcap B$ را دریابید.

حل: همان‌طورکه در دیاگرام مقابل نشان داده شده است:

$$A\bigcap B=\{1,2,3\}\bigcap\{1,2,3,4,5,6\}=\{1,2,3\}=A$$



$A\bigcap B$

مثال چهارم: اگر $A=\{1\}$, $B=\{1,2\}$ و $C=\{1,2,3\}$ باشد؛ $(A\bigcap B)\bigcap C$ و $A\bigcap(B\bigcap C)$ را دریافت نموده، با هم مقایسه کنید.

حل:

$$B\bigcap C=\{1,2\}\bigcap\{1,2,3\}=\{1,2\}$$

$$A\bigcap(B\bigcap C)=\{1\}\bigcap\{1,2\}=\{1\}$$

به همین ترتیب

$$A\bigcap B=\{1\}\bigcap\{1,2\}=\{1\}$$

$$(A\bigcap B)\bigcap C=\{1\}\bigcap\{1,2,3\}=\{1\}$$

در نتیجه

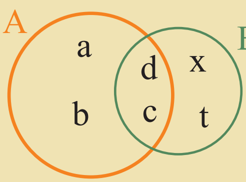
$$A\bigcap(B\bigcap C)=(A\bigcap B)\bigcap C=\{1\}$$

این خاصیت را به نام خاصیت اتحادی تقاطع یاد می‌کنند.

تقاطع دو ست A و B عبارت از ستی است که عناصر آن هم در A و هم در B شامل باشند.

تقاطع هر ست A با خودش مساوی به خود A است: $A\bigcap A=A$

تمرین



1- شکل مقابل را در نظر بگیرید.

- عناصر هر یک از ست‌های A و B را از روی شکل بنویسید.
- $A\bigcap B$ و $B\bigcap A$ را به دست آورده، در شکل نشان دهید.

2- اگر $A=\{5,10,15,20\}$، $B=\{6,10,12,20\}$ و $C=\{1,2,10,20,30\}$ باشد.

- ست‌های A، B و C را در دیاگرام وین نشان دهید.
- $A\bigcap B$، $A\bigcap C$ و $B\bigcap C$ را دریابید.

اتحاد ست‌ها (Union Of Sets)



5 نفر شاگرد صنف 7، عضو تیم والیبال و 7 نفر شاگرد صنف 7 عضو تیم فوتبال می‌باشند؛ زمانی که شاگردان هر دو تیم فوتبال و والیبال غرض درس به صنف می‌روند، جمعاً در صنف چند نفر می‌باشند؟

ست شاگردان صنف 7 = {دین محمد, عطاءالله, صفت الله, نادر,عزت الله, قاسم, احمد, محمود, زلمی, حسن} = A

ست تیم والیبال = { قاسم, احمد, محمود, زلمی, حسن} = B

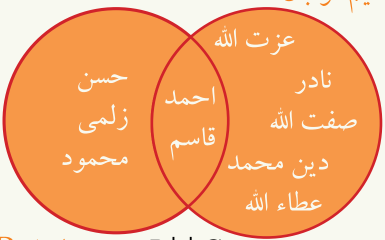
ست تیم فوتبال = {عطاء الله, دین محمد, صفت الله, نادر, عزت الله, قاسم, احمد} = C

مشاهده می گردد که 5 نفر در تیم والیبال و 7 نفر در تیم فوتبال اشتراک دارند؛ اما زمانی که به صنف می‌روند جمعاً در صنف 10 نفر می‌شوند؛ این مسأله اتحاد ست‌های B و C بوده به شکل زیر نمایش داده می‌شود:

$B\cup C$، که $\cup$ علامت اتحاد بین دو ست می‌باشد.

{عطاءالله, دین محمد, صفت الله, نادر, عزت الله, قاسم, احمد} $\cup$ { قاسم, احمد, محمود, زلمی, حسن} = $B\cup C$

{دین محمد, عطاءالله, صفت الله, نادر, عزت الله, قاسم, احمد, محمود, زلمی, حسن} = A

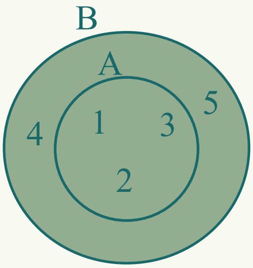


دیده می‌شود که قاسم و احمد هم عضو تیم والیبال و هم عضو تیم فوتبال می‌باشند. در اتحاد ست‌ها عناصر مشترک تنها یک بار نوشته می‌شوند، طوری که در دیاگرام وین نشان داده شده است.

فعالیت

هرگاه ست‌های $A=\{1,2,3,4\}$ و $B=\{3,4,5,6\}$ داده شده باشند، $A\cup B$ و $B\cup A$ را به دست آورده و در دیاگرام وین نشان دهید.

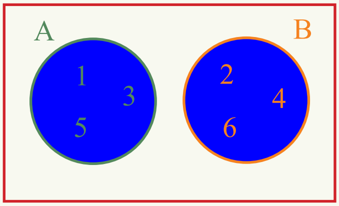
مثال اول: اگر ست‌های $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{1,2,3,4,5\}$ داده شده باشند، $A\cup B$ و $B\cup A$ را دریافت نموده و در شکل نشان دهید.



$$A\cup B=\{1,2,3\}\cup\{1,2,3,4,5\}=\{1,2,3,4,5\}$$
$$B\cup A=\{1,2,3,4,5\}\cup\{1,2,3\}=\{1,2,3,4,5\}$$

مثال دوم: اگرست‌های $A=\{1,3,5\}$ و $B=\{2,4,6\}$ داده شده باشند، $A\cup B$ رادریافت نموده و در شکل نشان دهید. $A\cup B=\{1,3,5\}\cup\{2,4,6\}=\{1,2,3,4,5,6\}$

$A\cup B$



مثال سوم: اگر $A=\{1\}$, $B=\{1,2\}$ و $C=\{1,2,3\}$ باشد $(A\cup B)\cup C$ و $A\cup(B\cup C)$ را دریافت نمایید:

حل:

$$B\cup C=\{1,2\}\cup\{1,2,3\}=\{1,2,3\}$$
$$A\cup(B\cup C)=\{1\}\cup\{1,2,3\}=\{1,2,3\}$$
$$A\cup B=\{1\}\cup\{1,2\}=\{1,2\}$$
$$(A\cup B)\cup C=\{1,2\}\cup\{1,2,3\}=\{1,2,3\}$$

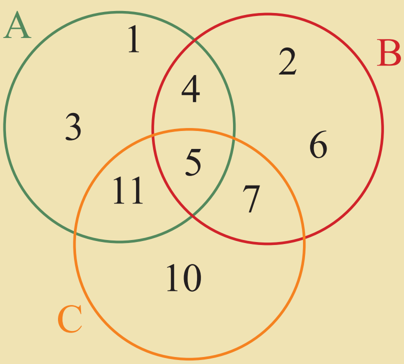
در نتیجه $(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$

خاصیت فوق را به نام خاصیت اتحادی عملیهٔ اتحاد ست‌ها یاد می‌نمایند.

اتحاد دو ست A و B عبارت از ستی است که عناصر آن یا در A و یا در B شامل باشند.

تمرین

بادر نظر داشت شکل مقابل، ست‌های A ، B و C:
$A\cup B$ ، $A\cup C$ ، $B\cup C$، و $(A\cup B)\cup C$ را به‌طریق لست کردن عناصر بنویسید.



تفاضل دو ست (Difference Of two Sets)



اگر شاگردان تیم والیبال صنف 7 به مسابقه بروند، در صنف 7 چند نفر شاگرد باقی می‌ماند؟

طوری که می‌دانید:

شاگردان صنف 7 که عضو تیم والیبال استند، عبارت از ست {قاسم، احمد، محمود، زلمی، حسن} = B بوده و ست تمام شاگردان صنف 7 یا ست A مساوی است به:

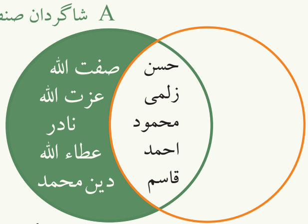
{زلمی، محمود، دین محمد، عطاءالله، نادر، عزت الله، قاسم، صفت الله، احمد،حسن} = A

بنابراین ست شاگردانی که در صنف می‌مانند و عضو تیم والیبال نیستند، عبارت‌است از:

صفت الله، عزت الله، نادر، عطاءالله و دین محمد، که در حقیقت تفاضل این دو ست می‌باشد.

شاگردان باقی‌مانده در صنف که عضو تیم والیبال نیستند {صفت الله، عزت الله، نادر، عطاءالله، دین محمد} = $A - B$

که در حقیقت تفاضل این دو ست می‌باشد. تفاضل دو ست فوق در شکل نیز نشان داده شده است:



مثال اول:

تیم والیبال = {محمود، زلمی، قاسم، حسن، احمد} = B

تیم فوتبال = {عزت الله، عطاءالله، دین محمد، نادر، صفت الله، قاسم، احمد} = C

$B - C$ و $C - B$ را دریافت نموده و در شکل نشان دهید.



حل: در $B - C$ عناصری شامل اند که در B شامل؛ اما در C شامل نیستند؛ بدین معنا شاگردانی که در تیم والیبال باشند؛ اما در تیم فوتبال نباشند، مطلوب است.

{عزت الله، عطاءالله، دین محمد، نادر، صفت الله، قاسم، احمد} − {محمود، زلمی، قاسم، حسن، احمد} = $B - C$

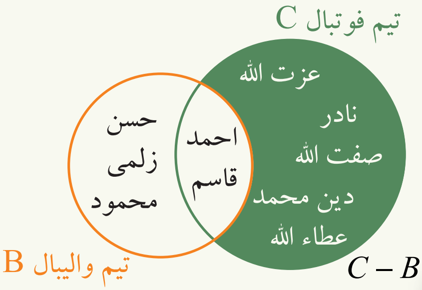
{محمود، زلمی، حسن} = $B - C$

در $C-B$ شاگردانی شامل می‌باشند که در تیم فوتبال شامل؛ اما در تیم والیبال شامل نمی‌باشند.

$C-B=$ {محمود، زلمی، قاسم، حسن، احمد} – {عزت الله، عطاءالله، دین محمد، نادر، صفت الله، قاسم، احمد}

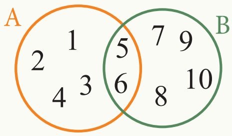
= {عزت الله، عطاءالله، دین محمد، نادر، صفت الله}

$C-B$ در شکل هندسی به طور زیر نشان داده شده است:



دیده می‌شود که $B-C\neq C-B$ بوده و علامت $\neq$ به مفهوم مساوی نیست به کار می‌رود.

فعالیت



- عناصر ست A و B را بنویسید.
- $A-B$ و $B-A$ را به دست آورده و در شکل نشان دهید.

مثال دوم:

حل:

$\{a,b\}-\{b\}=\{a\}$

$\{x,y,z\}-\{a,b\}=\{x,y,z\}$

$\{a,b\}-\{a,b\}=\varnothing$

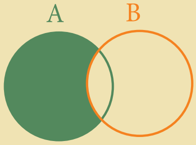
تفاضل دو ست A–B عبارت از ستی است که عناصر آن در A شامل؛ اما در B شامل نیستند.
و B–A عبارت از ستی است که عناصر آن در B شامل؛ اما در A شامل نیستند.

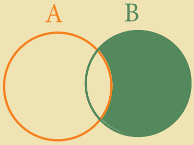
تمرین

1- اگر ست‌های $A=\{2,4,6,8\}$ ، $B=\{1,3,5,7\}$ و $C=\{4,6,8\}$ داده شده باشند.
$A-A$ ، $A-B$ ، $B-A$ ، $B-B$ ، $A-C$ و $C-A$ را دریابید.

2- اگر ست‌های $C=\{a,b,8,12\}$ و $D=\{a,12,16\}$ داده شده باشند.
$C-D$ و $D-C$ را دریابید.

3- در کدام شکل قسمت رنگ‌شده ست $A-B$ را نشان می‌دهد؟

a: 

b: 

4- اگر $A=\{1,3,5\}$ و $B=\{2,4,6\}$ داده شده باشند، $A-B$ مساوی است به:

a) B b) A

ست کلی و مکملهٔ یک ست (Universal Set and Complement Set)



در صنف 7 مضامین تعلیمات اسلامی، ریاضی، ساینس، اجتماعیات، پشتو، دری، انگلیسی، عربی، هنرها و تربیت بدنی تدریس می‌شوند.
یک شاگرد صنف 7، کتاب‌های تعلیمات اسلامی، اجتماعیات، پشتو، هنرها، انگلیسی، عربی و تربیت بدنی را به دست آورده‌است.
این شاگرد کدام کتاب‌ها را باید به دست آورد تا تمام کتاب‌هایش تکمیل گردند؟

فعالیت

- ست تمام حروف زبان انگلیسی را بنویسید و آن را به U نشان دهید.
- ست تمام حروف صدادار زبان انگلیسی را مشخص نموده، آن را A بنامید.
- ست تمام حروف زبان انگلیسی را با دیاگرام وین نشان دهید.
- ست حروف صدا دار و ست حروف بی صدا (غیر واول) را در همان شکل نشان دهید.

در فعالیت فوق ست حروف زبان انگلیسی را **ست عمومی** می‌نامند که به U نشان داده می‌شود و ست حروف بی‌صدای (غیر واول) را به نام **ست مکملهٔ** حروف صدا دار (واول) A یاد می کنند. مکملهٔ ست A را به A' یا $\overline{A}$ نشان می دهند.

به عبارهٔ دیگر، اتحاد ست حروف بی‌صدا زبان انگلیسی با ست حروف صدا دار، ست حروف زبان انگلیسی را تشکیل می دهند.

طوری که می‌دانید، زبان انگلیسی 26 حرف داشته که 5 حرف آن صدا دار و 21 حرف آن غیر بی صدا می‌باشد. ست حروف بی صدا به نام ست مکملهٔ ست حروف صدادار یاد می‌شوند.

$A = \{a, e, i, o, u\}$

$U = \{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,o,p,q,r,s,t,u,v,w,x,y,z\}$

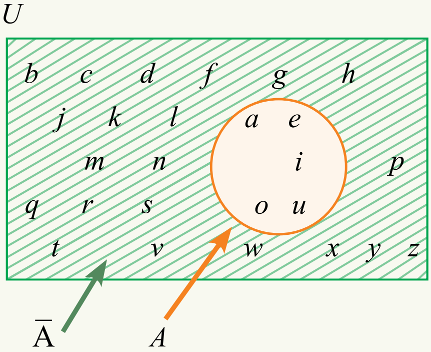
ست حروف واول (صدادار) ⟵ $\overline{A} = U - A$ ⟶ ست حروف غیر واول (بی صدا)

↓

ست حروف زبان انگلیسی

$\overline{A} = \{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,o,p,q,r,s,t,u,v,w,x,y,z\} - \{a,e,i,o,u\}$

$= \{b,c,d,f,g,h,j,k,l,m,n,p,q,r,s,t,v,w,x,y,z\}$



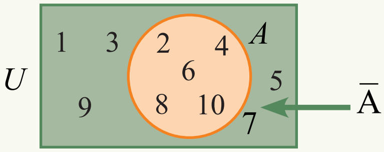
$\bar{A}$ که در این شکل خط خط شده است؛ مکملهٔ ست A می‌باشد.

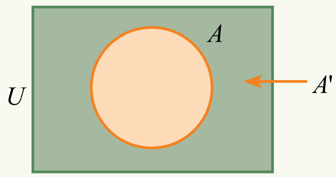
در هر موردی که بحث می‌شود، یک ست مشخص وجود دارد که تمام عناصر مربوط موضوع را احتوا نموده و آن را ست عمومی یا ست کلی می‌نامند.

مثال: اگر $U = \{1,2,3,4,5, 6,7,8,9,10\}$ و $A = \{2,4,6,8,10\}$ باشد مکملهٔ A را نظر به U دریافت نموده و در شکل نشان دهید.

حل: برای به دست آوردن $\bar{A}$ عناصر ست A را از ست U حذف می‌کنیم؛ عناصری که در ست U باقی می‌مانند، $\bar{A}$ یا مکملهٔ A نظر به U می‌باشند.

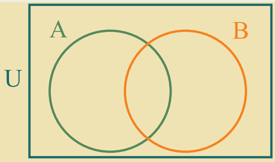
$$\bar{A} = U - A = \{1,2,3,4,5, 6,7,8,9,10\} - \{2,4,6,8,10\} = \{1,3,5,7,9\}$$





مکملهٔ ست A را به A' یا $\bar{A}$ نشان داده و دارای عناصری می‌باشد که آن عناصر در ست عمومی U شامل بوده، اما در ست A شامل نمی‌باشند. قسمتی که سبز رنگ است عبارت از ست $\bar{A}$ می‌باشد.

تمرین



1- $\bar{A}$ و $\bar{B}$ را در شکل مقابل مشخص کنید.

2- ست اعداد اولیهٔ کوچک‌تر از 20 را دریافت نموده و آن را U بنامید.

- ست فرعی B را طوری مشخص کنید که عناصر آن بین 5 و 15 باشد.
- $\bar{B}$ را در شکل مشخص کنید.

ست‌های متناهی و نامتناهی(Finite and Infinite Sets)



آیا ستاره گانی را که در آسمان می‌بینید، قابل شمارش اند؟

هرگاه $A = \{a, b\}$ باشد، A دارای دو عنصر و هرگاه $B = \{1,2,3,4\}$ باشد، B دارای چهار عنصر می‌باشد. هرگاه ست اعداد طبیعی طاق بین 2 تا 20 را به C نشان دهیم، $C = \{3,5,7,9,11,13,15,17,19\}$ بوده و دارای 9 عنصر می‌باشد.

مثال اول: ست حروف صدا دار زبان انگلیسی که عناصر آن قابل شمارش اند یک ست متناهی است: $A = \{a, e, i, o, u\}$

اما ست اعداد طبیعی که یک ست نامتناهی بوده و عناصر آن قابل شمارش نمی‌باشند، طور زیر نشان داده می‌شود: $N = \{1,2,3,4...\}$

ارائهٔ نقطه نقطه(...) بدین معنا است که اعداد طبیعی پایان ندارند.

فعالیت

- ست اعداد جفت بین 20 و 30 را بنویسید.
- تعداد عناصر آن را تعیین نموده و بگویید که آیا این یک ست متناهی است، یا خیر؟
- ست اعداد جفت بزرگتر از عدد 20 را بنویسید. آیا می‌توانید تعداد عناصر این ست را تعیین کنید. آیا این یک ست متناهی است یا نامتناهی؟

مثال دوم: در ست‌های زیر کدام ست‌ها متناهی و کدام ست‌ها نامتناهی می‌باشند؟

A = {نام‌های ماه‌های سال}

B = {رنگ‌های بیرق افغانستان}

$C = \{2,3,4,5\}$

$D = \{2,4,6,8, \quad ...,100\}$

$E = \{2, 4,6 ,8,...\}$

$N = \{1,2,3,4,5,6...\}$

حل: ست‌های C,B,A و D ست‌های متناهی اند؛ اما ست‌های E و N ست‌های نامتناهی می‌باشند.

مثال سوم: در ست‌های زیر کدام ست متناهی و کدام ست نا متناهی است؟

$B=\{$مضرب‌های عدد شش$\}$ $A=\{$حروف زبان انگلیسی$\}$

حل: ست A یک ست متناهی است، زیرا 26 عنصر دارد. اما ست B یک ست نامتناهی است، زیرا مضرب‌های عدد 6 قابل شمارش نمی‌باشند.

اگر عناصر یک ست قابل شمارش (معین) باشند، به نام **ست متناهی** یاد می‌شود؛ اما اگر عمل شمارش عناصر یک ست به انتها نرسد، این گونه ست را **ست نامتناهی** می گویند. ست خالی نیز یک ست متناهی است.

تمرین

1- در ست‌های زیر ست‌های متناهی و نامتناهی را مشخص کنید.

$M=\{1,2,3,a,b,c\}$

$D=\{a,b,c,d,e\}$

$O=\{1,3,5,7,9...\}$

$E=\{10,20,30,...,1000\}$

2- کدام یک از ست‌های زیر ست نامتناهی می‌باشد؟

$C=\{$اعداد طاق بین 50 و 100$\}$ $B=\{1,2,3...\}$ $A=\{1,2,3...,1000\}$

3- کدام یک از ست‌های زیر ست متناهی می‌باشد؟

$D=\{1,3,5...\}$ $B=\{2,4,6,8...\}$ $A=\{$پنج بنای اسلام$\}$

4- چهار ست متناهی و چهار ست نامتناهی را بنویسید.

خلاصهٔ فصل اول

- هر دستهٔ مشخص شده از اشیای مختلف را یک ست می نامند و اشیای آن عبارت از عناصر ست می‌باشند. عناصر ست را در بین علامت ست { } نوشته و توسط علامت «،» از یکدیگر جدا می‌سازند.
- ستی که هیچ عنصری ندارد به نام ست خالی یاد می‌گردد که توسط علامت $\varnothing$ و یا { } نشان داده می‌شود.
- عنصر بودن در یک ست با علامت $\in$ و عنصر نبودن در یک ست با علامت $\notin$ نشان داده می‌شود.
- ست‌ها عموماً به دو روش ارائه می‌شوند. روش لست کردن (روش تفصیلی) که تمام عناصر و یا تصاویر آن‌ها در بین علامت { } نوشته می‌شوند و طریق توصیفی(روش اجمالی) که بر اساس خاصیت‌های مشترک عناصر، در یک جمله نگاشته می‌شوند.
- دو ست که عناصر آن‌ها یکسان باشند ست‌های مساوی و اگر تنها تعداد عناصر آن‌ها با هم مساوی باشند؛ به نام ست‌های معادل یاد می کنند.
- اگر تمام عناصر ست B در ست A شامل باشند، ست B ست فرعی ست A بوده و این طور نشان داده می‌شود: $B \subset A$
- تقاطع دو ست A و B عبارت از ستی است که عناصر آن هم در A و هم در B شامل باشند و این طور نشان داده می‌شود: $A \cap B$
- اتحاد دو ست A و B عبارت از ستی است که عناصر آن یا در A ، یا در B و یا در هر دوی آن‌ها شامل باشند و این طور نشان داده می‌شوند: $A \cup B$
- تفاضل دو ست $A - B$ عبارت از ستی است که عناصر آن در ست A شامل بوده؛ ولی در ست B شامل نباشند.
- مکملهٔ یک ست A نظر به یک ست U عبارت از ستی است که عناصر آن در U شامل بوده؛ ولی در A شامل نباشد که به $\bar{A}$ نشان داده می‌شود.
- ستی که عناصر آن قابل شمارش باشد، ست متناهی و ستی که عناصر آن قابل شمارش نباشد، ست نامتناهی نامیده می‌شود.
- قوانین تبدیلی و اتحادی در عملیه‌های تقاطع و اتحاد ست‌ها صدق می کنند.

تمرین فصل اول

1- ست اعداد طاق را که بر 2 پوره قابل تقسیم باشند بنویسید.

2- اگر A ست نام ماه‌های سال باشد، آن را به طریق لست کردن عناصر ارائه کنید.

3- اگر $A=\{1,2,3,4\}$ ، $B=\{2,4,6,8\}$ و $C=\{a,e,i,o,u\}$ باشد، خانه‌خالی‌های زیر را با استفاده از علامت $\in$ و $\notin$ پر کنید.

$3\square A$, $u\square B$, $10\square C$, $i\square A$, $8\square B$, $e\square C$

$8\square A$, $3\square B$, $f\square C$, $2\square A$, $e\square B$, $8\square C$

4- اگر ست‌های $A=\{a,b,c\}$ ، $B=\{1,2,3\}$ و $C=\{b,a,c\}$ داده شده باشند، کدام جفت از ست‌ها، مساوی و کدام آن‌ها معادل اند؟

5- اگر ست شاگردان مکتب شما A و ست شاگردان صنف شما B باشد، آیا ست B می‌تواند ست فرعی A باشد؟

6- اگر ست‌های $A=\{0,1,2\}$ ، $B=\{0,\frac{1}{2},1\}$ و $C=\{3,4\}$ داده شده باشند، $A\cap A$ ، $A\cap B$ ، $A\cap C$ ، $B\cup C$ ، $C\cup A$ ، $A\cup B$ و $B\cap C$ را دریابید.

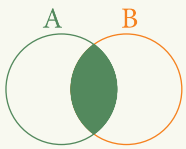
7- هرگاه $A=\{1,2,3,4,5\}$ و $B=\{2,4,6,8\}$ باشد، $A-B$ و $B-A$ را دریابید.

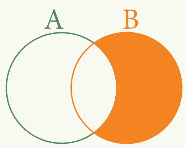
8- اگر $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ ، $A=\{2,4,6,8,10\}$ و $B=\{1,3,5,7,9\}$ باشد؛ $\bar{A}\cap\bar{B}$ ، $\bar{B}\cup\bar{A}$ ، $\bar{A}\cup\bar{B}$ ، $\bar{B}$ ، $\bar{A}$ و $A\cup\bar{B}$ را دریابید.

9- کدام یک از این ست‌ها متناهی و کدام یک نامتناهی می‌باشد؟

$A=\{x,y,m\}$ $\quad B=\{1,2,3,4....\}$ $\quad C=\{1,2...100\}$

10- در کدام شکل قسمت رنگ‌شده تقاطع دو ست A و B را نشان می‌دهد؟

a) 

b) 

11- اگر ست‌های $A=\{7,9,11,13\}$ و $B=\{6,8,10,12\}$ داده شده باشند، $A-B$ و $B-A$ را دریابید و در دیاگرام وین نشان دهید.

فصل دوم
اعداد طبیعی



بشر از ابتدای تاریخ با شمارش اشیا
در محیط خود آشنا بود.

اعداد طبیعی(Natural numbers)



چه فکر می‌کنید اولین اعدادی که بشر به آن‌ها سر و کار داشت کدام اعداد بودند؟

انسان‌ها از زمان قدیم به شمارش اشیایی که در طبیعت مشاهده می کردند، ضرورت داشتند. از همین شمارکردن اشیا مفهوم اعداد طبیعی به وجود آمده است. اعداد طبیعی را اعداد شمارش(Count numbers) نیز می گویند.این اعداد از یک شروع می‌شود و با علاوه نمودن یک به عدد قبلی، عدد بعدی حاصل می گردد. اعداد ...1,2,3,4 را اعداد طبیعی می گویند. و ست آن به طور زیر نشان داده می‌شود:

$$\mathbb{N}=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,\cdots\}$$

اعداد طبیعی را می‌توان روی خط اعداد (line numbers) به طور زیر نشان داد:



هر عدد که به طرف راست عدد دیگری واقع باشد، بزرگتر و اگر به طرف چپ عدد واقع باشد کوچکتر از آن عدد می‌باشد به طورمثال: $8>7$ و $9>8$ است.

می‌دانیم که حاصل جمع دو عدد طبیعی نیز یک عدد طبیعی است؛ به طور مثال: 3 و 5 دو عدد طبیعی اند و حاصل جمع آن دو ($3+5=8$) نیز یک عدد طبیعی است، پس ست اعداد طبیعی در عملیهٔ جمع دارای خاصیت بسته گی می‌باشد.

سؤال: آیا در جمع دو عدد طبیعی ترتیب جمع کردن آن‌ها با هم شرط است؟

مثال اول: $7+6=13$ و نیز $6+7=13$ می‌شود؛ پس: $6+7=7+6$

دیده می‌شود که در جمع دو عدد طبیعی، ترتیب قرارگرفتن آن‌ها با هم شرط نیست. این خاصیت را خاصیت تبدیلی اعداد طبیعی در عملیهٔ جمع می گویند.

مثال دوم

$$8+(3+2)=(8+3)+2$$

$$8+5=11+2$$

$$13=13$$

این خاصیت را خاصیت اتحادی اعداد طبیعی در عملیهٔ جمع می گویند.
صفر با هر عدد طبیعی که جمع شود، حاصل جمع مساوی با خود عدد می گردد؛ مثلاً: $3+0=0+3=3$ است صفر را به نام عنصر عینیت عملیهٔ جمع یاد می کنند.

فعالیت

- آیا خاصیت‌های فوق در عملیهٔ ضرب اعداد طبیعی نیز صدق می کنند؟
- خانه‌های خالی زیر را پر کنید.

$11+(\square+17)=(\square+18)+\square$ ، $888\times\square=0$

$11\times(18+\square)=\square\times18+\square\times15$ ، $25\times\square=12\times\square$

دیده می‌شود خاصیت‌های اتحادی و تبدیلی در عملیهٔ ضرب اعداد طبیعی نیز صدق می کنند.

به خاطر داشته باشید: حاصل ضرب هر عدد طبیعی با صفر مساوی به صفر و حاصل ضرب هر عدد طبیعی با یک مساوی به خود عدد می‌باشد؛ مثلاً : $3\times1=3$, $3\times0=0$

مثال سوم

$$3\times(4+5)=(3\times4)+(3\times5)$$

$$3\times9=12+15$$

$$27=27$$

این خاصیت به نام خاصیت توزیعی ضرب بالای جمع یاد می گردد.

صفر عنصر عینیت در عملیهٔ جمع و یک عنصر عینیت در عملیهٔ ضرب می‌باشد و خاصیت‌های بسته گی، تبدیلی و اتحادی در عملیه‌های جمع و ضرب اعداد طبیعی و خاصیت توزیعی ضرب بالای جمع صدق می کنند.

تمرین

1– کدام یک از جملات زیر درست و کدام یک نادرست است؟
- حاصل جمع دو عدد طبیعی، یک عدد طبیعی است.
- در اعداد طبیعی، عدد یک، عنصر عینیت عملیهٔ جمع می‌باشد.
- اعداد طبیعی در عملیهٔ جمع از خاصیت تبدیلی پیروی می کنند.
- اعداد طبیعی در عملیهٔ ضرب نیز از خاصیت تبدیلی پیروی می کنند.
- خاصیت تبدیلی عملیهٔ تفریق در اعداد طبیعی صدق می کند.
- خاصیت تبدیلی عملیهٔ تقسیم در اعداد طبیعی صدق می کند.

2– خالیگاه‌های زیر را پر کنید.

$325\times88+325\times73=325\times(\square+\square)$ $\quad$ $211+327=327+\square$

$803\times593=593\times\square$ $\quad$ $3935\times\square=0$

$79\times(35\times89)=(\square\times35)\times89$

قابلیت‌های تقسیم (Divisibility) در اعداد طبیعی

آیا عدد 82 بر 9 پوره تقسیم می شود؟ عددی را پیدا کنید که بر 9 پوره قابل تقسیم باشد.

82÷9

طبق مثال داده‌شده، خانه‌های خالی جدول زیر را پر کنید.
کدام اعداد بر کدام اعداد پوره تقسیم می‌شوند؟

اعداد	2	3	4	5	6	7	8	9	10
210	✓	✓	×	✓	✓	✓	×	×	✓
1200									
817									
105									
2008									

اگر 81، 36 و 45 را بر 9 تقسیم کنیم، باقی‌ماندهٔ تقسیم مساوی به صفر است؛ ولی در تقسیم 82 بر 9 باقی‌مانده صفر نمی‌شود. در حالت اول تقسیم، که باقی‌مانده مساوی به صفر شد، می گوییم 81 بر 9 پوره قابل تقسیم است؛ ولی 82 بر 9 پوره قابل تقسیم نیست.

فعالیت

- زیر اعدادی که بر 2 پوره قابل تقسیم اند خط بکشید:

47, 29, 7821 , 2790 , 3154 , 106 , 218 , 7822

- زیر اعدادی که بر 9 پوره قابل تقسیم اند خط بکشید:

882 , 1232 , 11115 , 1115 , 315 , 702

- جملهٔ صحیح را به علامت ✓ و جملهٔ غلط را به علامت × مشخص کنید:

– ☐ عددی که رقم یک‌های آن صفر و یا 5 باشد، بر 5 پوره قابل تقسیم است.

- □ عددی که مجموع ارقام آن بر 3 پوره تقسیم شود، آن عدد بر 3 پوره قابل تقسیم است.
- □ اگر عددی بر 9 پوره قابل تقسیم باشد، بر 3 نیز پوره قابل تقسیم است.

• زیر اعدادی که هم بر 2 و هم بر 3 پوره قابل تقسیم اند، خط کشیده و توسط عملیهٔ تقسیم نشان دهید که بالای 6 نیز پوره قابل تقسیم می‌باشند یا خیر؟

438 , 216 , 73 , 128 , 54 , 537 , 126 , 582 , 602

مثال: کدام عدد بر 6 و کدام عدد بر 9 پوره قابل تقسیم است؟ 14,12,24,18

حل: چون 12 ، 18 و 24 هم بر 3 و هم بر 2 پوره قابل تقسیم استند، پس بر 6 نیز پوره قابل تقسیم استند. 18 تنها عددی است که بر 9 نیز پوره قابل تقسیم است.

هر گاه در تقسیم دو عدد با هم، باقی‌مانده صفر شود، می گوییم مقسوم برمقسوم علیه پوره قابل تقسیم است.

تمرین

1- در خانه‌های خالی کوچک‌ترین رقمی را بنویسید تا عددی که حاصل می‌شود، بر اعداد داده‌شده پوره قابل تقسیم باشند.

56 □ 723 بر 6	2 □ 56 بر 3	□ 725 بر 4
	□ 56 □ 392 بر 2	□ 5 □ 672 بر 5

2- جواب‌های درست را انتخاب کنید.

- اعدادی که رقم یک‌ها آن‌ها صفر باشد، بر کدام اعداد قابلیت تقسیم را دارند؟

a) 2,5,10　b) 3　c) 4　d) 8

- عدد 1110 بر کدام عدد زیر پوره قابل تقسیم است؟

a) 2,5,6,10　b) 4　c) 7　d) 9

- عدد 12300 بر کدام اعداد پوره قابل تقسیم است؟

a) 7　b) 8　c) 2,3,4,5,6,10　d) 7,8,9

3- کدام اعداد زیر بر 4,3,2 و 6 پوره قابل تقسیم است؟

87 , 128 , 858 , 1017

24324 , 76 , 531

4- سه عدد مختلف را دریابید که هم بر 3 و هم بر 4 پوره قابل تقسیم باشند.

5- سه عدد مختلف را دریابید که هم بر 2 و هم بر 3 پوره قابل تقسیم باشند.

6- عدد 4092 بر کدام اعداد زیر پوره قابل تقسیم است؟

a) 8　b) 7　c) 11,3　d) 13

تجزیه(Factoring)
اعداد طبیعی



عدد 20 را به شکل حاصل ضرب دو عدد طبیعی بنویسید.
زیر اعدادی که تنها به عدد یک و خود شان قابل تقسیم اند خط بکشید:
21, 17, 15, 23, 32

می‌دانیم که $6 \times 4 = 24$ است و اعداد 4 و 6 را به نام اجزای ضربی(عوامل ضربی) 24 یاد می کنند.
سؤال: آیا تنها 6 و 4 اجزای ضربی 24 می‌باشند؟

فعالیت

- اعداد 18 و 31 را به اجزای ضربی تجزیه نموده و بگویید که تعداد اجزای ضربی 18 زیادتر است یا از 31؟
- اجزای ضربی اعداد 5، 11 و 19 را بنویسید.

در فعالیت فوق دیدیم که برخی از اعداد مانند 18 بیشتر از دو جزء ضربی دارند و برخی از اعداد مانند 31 و 11 تنها دو جزء ضربی دارند.

اعداد اولیه (Prime Numbers): اعدادی‌اند که به جز از یک و خودشان بر عدد دیگری پوره قابل تقسیم نمی‌باشند. به عبارهٔ دیگر اعدادی که تنها دو قاسم داشته باشند، به نام اعداد اولیه یاد می‌شوند. ست اعداد اولیه با P نشان داده می‌شودو عبارت است از: $P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31 \cdots\}$

اعداد مرکب (Composite Numbers): اعدادی که علاوه بر یک و خودشان براعداد دیگری نیز قابل تقسیم باشند به نام اعداد مرکب یاد می گردند. مانند:

$C = \{4,6,8,9,10,12,14,15.....\}$

یادداشت: عدد یک نه اولیه و نه مرکب است.

مثال: کدام یک از عددهای 27 ,17 ,36 و 19 اولیه و کدام یک آن‌ها مرکب اند؟

حل: ابتدا قاسم‌های هر یک از اعداد را می‌نویسیم:

اعداد 3,9,27 و 1 قاسم‌های 27 می‌باشند، بنابراین 27 عددی مرکب است.
اعداد 1,17 قاسم‌های 17 می‌باشند، بنابراین عدد 17 عددی اولیه است.
اعداد 36, 18, 12, 9, 6, 4, 3, 2 و 1 قاسم‌های عدد 36 می‌باشند، بنابراین 36 عددی مرکب است.
اعداد 9, 3 و 1 قاسم‌های 9 می‌باشند، بنابراین 9 عددی مرکب است.
اعداد 19 و 1 قاسم‌های 19 می‌باشند، بنابراین 19 عددی اولیه است؛ زیرا که تنها دو قاسم دارد.

نوشتن یک عدد به صورت حاصل ضرب اجزای ضربی را تجزیه (Factoring) می گویند.

تمرین

1- کدام جمله درست است؟

a) عدد یک، عدد اولیه نیست. b) عدد یک، عدد قابل تجزیه می‌باشد.

2- اگر $17 \times 11 = 187$ باشد؛ پس:

a) 187 یک عدد اولیه است. b) 17 جزء ضربی 187 است.

3- کدام یک از اعداد زیر اولیه وکدام یک مرکب است؟

15 ، 51 ، 49 ، 37 ، 14 ، 11

4- آیا عدد یک، عدد مرکب است؟ چرا؟

5- در مقابل اعدادی که اولیه اند، اولیه و در مقابل اعدادی که مرکب اند، مرکب بنویسید.

67	90	59
1111	847	73

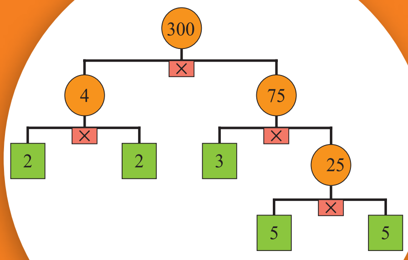
6- در اعداد زیر، کدام یک آن‌ها عدد اولیه نیست؟

d) 23 c) 21 b) 19 a) 47

7- در اعداد زیر، کدام یک آن‌ها عدد مرکب نیست؟

d) 64 c) 39 b) 67 a) 90

تجزیه به اعداد اولیه(Prime Factoring)



$12 = 2\times2\times3$ و $12 = 3\times4$

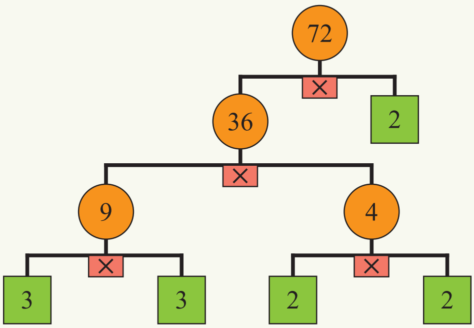
چه تفاوتی بین اجزای ضربی 12 در ارائه‌های فوق وجود دارد؟

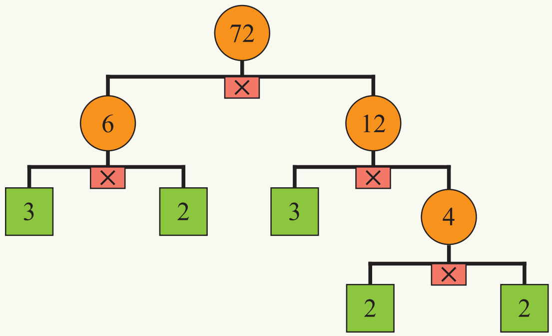
عدد 72 را به اشکال مختلف اجزای ضربی آن تجزیه نمایید:

1) $72 = 2\times36 = 2\times4\times9 = 2\times2\times2\times3\times3$

2) $72 = 6\times12 = 2\times3\times3\times4 = 2\times3\times3\times2\times2$

تجزیه‌های فوق را در شکل زیر نشان می‌دهیم:





فعالیت

عدد 72 را علاوه بر دو شکل فوق، به چند شکل دیگر تجزیه می‌توانید؛ طرز ارائهٔ آن را نیز نشان دهید.

می‌توان عملیهٔ تجزیه را در یک جدول به شکل زیر خلاصه کرد:

2	72
2	36
2	18
3	9
3	3
	1

$$72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$$

دیدیم از هر روشی که برای تجزیهٔ یک عدد به اجزای اولیهٔ ضربی‌اش استفاده کنیم، در پایان همواره به یک نتیجه می‌رسیم.

مثال: اعداد 208,416 و 2574 را به اجزای ضربی اولیهٔ آن‌ها تجزیه کنید.

حل:

2	2574
3	1287
3	429
11	143
13	13
	1

$$2574 = 2 \times 3 \times 3 \times 11 \times 13$$

2	416
2	208
2	104
2	52
2	26
13	13
	1

$$416 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 13$$

2	208
2	104
2	52
2	26
13	13
	1

$$208 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 13$$

می‌دانیم: در تجزیهٔ یک عدد تجزیه‌پذیر(عدد مرکب) به اجزای ضربی اولیه، عدد را به صورت حاصل ضرب دو عدد طبیعی بزرگ‌تر از یک می‌توانیم بنویسیم؛ اگر یکی از اجزای ضربی یا هر دوی آن‌ها تجزیه‌پذیر باشند، آن‌ها را نیز به صورت حاصل ضرب اعداد طبیعی بزرگ‌تر از یک می‌نویسیم. این کار را ادامه می‌دهیم تا این که همهٔ اجزای ضربی اعداد اولیه باشند؛ اگر همهٔ اجزای ضربی یک عدد مرکب، اعداد اولیه باشند، این گونه تجزیه را تجزیه به اعداد اولیه می‌نامند.

تمرین

1- اعداد 36 ، 48 و 70 را به اجزای ضربی اولیهٔ آن‌ها تجزیه کنید.

2- اعداد 12 ، 20 ، 45 ، 64 و 80 را به اجزای ضربی اولیهٔ آن‌ها تجزیه کنید.

3- اعداد 70 و 80 را اول به اجزای ضربی مرکب و سپس به اجزای ضربی اولیهٔ آن‌ها تجزیه کنید.

4- کدام یک از تجزیه‌های اعداد زیر درست و کدام یک نادرست است؟

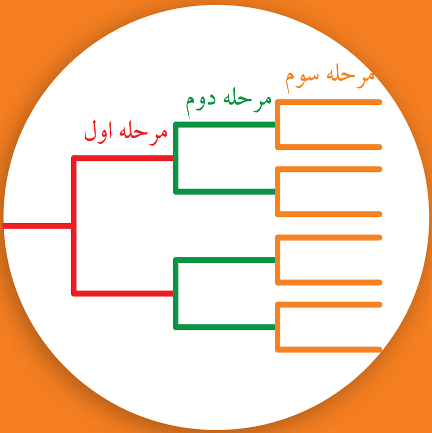
$15 = 5^3$ $16 = 2^4$ $28 = 2^2 \times 9$

$16 = 2 \times 13$ $27 = 3 \times 9$ $18 = 2 \times 3^2$

5- تمام اجزای ضربی اولیهٔ اعداد 24,9,15 و 29 را بنویسید.

6- اعداد 144 و 121 را به اجزای ضربی اولیهٔ آن تجزیه کنید.

طاقت (Power)



می‌دانیم که هر حجره چگونه به دو حجره تقسیم می‌شود. در شکل مقابل، مراحل انقسام یک حجره مشاهده می‌شود.

فعالیت

مرحله	صفر	اول	دوم	سوم	چهارم
تعداد حجره‌ها	1	2	2×2	$2\times 2\times 2$	

- مرحلهٔ چهارم را بکشید و جدول را کامل کنید.
- بین تعداد حجرات و مراحل تقسیم آن‌ها چه رابطه‌یی وجود دارد؟
- در مرحلهٔ دهم چند عدد حجره خواهیم داشت؟
- آیا می‌توانیم تعداد حجرات را در مرحلهٔ دهم به شکل خلاصه بنویسیم؟

حاصل جمع مقابل را به کمک عملیهٔ ضرب خلاصه کنید:

$4+4+4=3\times 4=12$

$3+3+3+3=4\times 3=12$

آیا حاصل ضرب $2\times 2\times 2$ را نیز می‌توان خلاصه کرد؟

برای آسانی کار می‌توان $2\times 2\times 2$ را به شکل 2^3 نوشته و آن را این طور می‌خوانیم، 2 به توان 3، در عدد 2^3، 2 را قاعده(Base)، 3 را توان‌نما(Exponent) و 2^3 را به نام طاقت سوم 2 یاد می‌کنند. توان‌نما نشان می‌دهد که قاعده چند دفعه در خودش ضرب شده است. 4^3 نشان می‌دهد که 4 سه دفعه در خودش ضرب گردیده است؛ یعنی: $4^3=4\times 4\times 4$

مثال اول: قیمت هر یک از طاقت‌های زیر را دریابید: 4^2 , 5^3 , 2^3 , 5^4 , 10^2 , 3^4

حل:

$10^2=10\times 10=100$ ، $2^3=2\times 2\times 2=8$ ، $4^2=4\times 4=16$

$3^4=3\times 3\times 3\times 3=81$ ، $5^4=5\times 5\times 5\times 5=625$ ، $5^3=5\times 5\times 5=125$

به همین ترتیب $(\frac{2}{3})^4$ به معنای $\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}$ است که $\frac{2}{3}$ قاعده و 4 توان‌نما می‌باشد.

فعالیت

- قیمت هر یک از طاقت‌های زیر را دریافت کنید:

$3^2 = \square$ ، $4^3 = \square$ ، $10^3 = \square$ ، $1^2 = \square$ ، $2^5 = \square$ ، $10^5 = \square$

- حاصل ضرب‌های زیر را به شکل طاقت بنویسید:

$4 \times 4 \times 4 =$ $\quad 9 \times 9 \times 9 \times 9 =$ $\quad 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 =$

- آیا اعداد 2^7 و 7^2 با هم مساوی اند؟ چرا؟

مثال دوم: آیا اعداد $\frac{2^3}{3}$ و $(\frac{2}{3})^3$ برابر اند؟

حل:

$$\frac{2^3}{3} = \frac{2 \times 2 \times 2}{3} = \frac{8}{3}$$

$$(\frac{2}{3})^3 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$$

پس $\frac{2^3}{3}$ و $(\frac{2}{3})^3$ برابر نیستند.

هرگاه یک عدد چندین مرتبه در خودش ضرب شود، در این‌صورت حاصل ضرب به طور ساده به شکل طاقت ارائه می‌گردد و یا کوتاه‌ترین طریقهٔ نشان دادن حاصل ضرب تکرار یک عدد را طاقت (Power) می‌نامند.

تمرین

1- حاصل ضرب $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ مساوی است به:

a) 2^5 b) 5^2 c) 25 d) 36

2- حاصل ضرب $10 \times 10 \times 10$ مساوی است به:

a) 10^3 b) 3^{10} c) 100 d) 10^{10}

3- عدد 3^3 مساوی است به:

a) 9 b) 27 c) 54 d) 12

4- یک شاگرد عددی را به اجزای ضربی اولیه تجزیه نموده که جواب آن $5 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 2$ می‌باشد. این جواب را به شکل طاقت چگونه می‌توانیم بنویسیم؟

a) $2^2 \times 5^3$ b) $2^3 \times 5^2$ c) $2^2 \times 5^2$ d) $2^3 \times 5^3$

5- اعداد 36 و 24 را به اجزای ضربی اولیهٔ آن‌ها تجزیه نموده و به شکل طاقت بنویسید.

6- اجزای ضربی اولیهٔ عدد 416 به شکل طاقت مساوی است به:

a) $2^5 \times 13$ b) $2^4 \times 13$

7- اجزای ضربی اولیهٔ عدد 208 به شکل طاقت مساوی است به:

a) $2^4 \times 13$ b) $2^5 \times 13$

قانون ضرب طاقت‌ها



36×24 را به عوامل ضربی اولیه تجزیه کرده و حاصل ضرب را به صورت طاقت بنویسید.
16 را به دو شکل به صورت طاقت بنویسید.
آیا می توانید عدد دیگری را پیدا کنید که به دو شکل به صورت طاقت نوشته شود؟

مثال اول: حاصل ضرب $3^3 \times 3^2$ و 3^5 را مقایسه کنید.

حل: چون می‌دانیم که $3^2 = 3 \times 3$ و $3^3 = 3 \times 3 \times 3$ است، بنابراین:

$$3^2 \times 3^3 = \underbrace{3 \times 3}\times\underbrace{3 \times 3 \times 3} = 3^5$$

در نتیجه دیده می‌شود که:

$$3^2 \times 3^3 = 3^{2+3} = 3^5$$

فعالیت

- تساوی‌های زیر را کامل کنید.

$$7^3 \times 7^2 = (7 \times 7 \times 7) \times (7 \times 7) = 7^{\square + \square}$$

$$2^2 \times 2^4 = (2 \times 2) \times (\square \times \square \times \square \times \square) = 2^{\square}$$

- آیا می‌توانید برای ضرب اعداد توان‌دار با قاعده‌های مساوی، یک قاعدهٔ عمومی را پیشنهاد کنید؟

در فعالیت فوق دیدیم که در ضرب طاقت‌هایی که دارای قاعده‌های مساوی باشند، حاصل ضرب مساوی به: قاعدهٔ مشترک به توان حاصل جمع توان‌های داده شده می‌باشد.

مثال دوم: حاصل ضرب $2^3 \times 2^5$ و $3^2 \times 3^3 \times 3^4$ را به دست آورید.

حل:

$$2^3 \times 2^5 = 2^{3+5} = 2^8$$

$$3^2 \times 3^3 \times 3^4 = 3^{2+3+4} = 3^9$$

در مورد حاصل ضرب $2^3 \times 3^3$ چه گفته می توانید؟

$$2^3 \times 3^3 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = (2 \times 3)(2 \times 3)(2 \times 3) = (2 \times 3)^3 = 6^3$$

در ضرب طاقت‌هایی که توان‌های مساوی و قاعده‌های مختلف داشته باشند، قاعده‌ها را در هم ضرب نموده و به توان یکی از توان‌های مساوی می‌نویسیم:

مثال سوم:

$3^5 \times 4^5 = (3 \times 4)^5 = 12^5$ ، $2^5 \times 3^5 = (2 \times 3)^5 = 6^5$

مثال چهارم:

$(3^4)^2 = (3)^{4\times2} = 3^8$ **یا** $(3^4)^2 = 3^4 \times 3^4 = 3^8$

در صورتی که یک عدد توان‌دار به توان برسد، با استفاده از قانون ضرب طاقت‌ها قاعده را به توان حاصل ضرب هر دو توان می‌نویسیم.

تمرین

1- حاصل ضرب‌های زیر را به شکل عدد توان‌دار بنویسید:

$7^2 \times 7^3 \times 7^5$, $2^5 \times 3^5$, $3^4 \times 3^2$

2- حاصل ضرب $2^3 \times 3^2$ مساوی است به:

a) 81 b) 72 c) 6^5

3- حاصل ضرب $3 \times 3^2 \times 3^3$ مساوی است به:

a) 3^5 b) 3^6 c) هر دو غلط اند

4- حاصل ضرب $2^3 \times 3^3 \times 4^3$ مساوی است به:

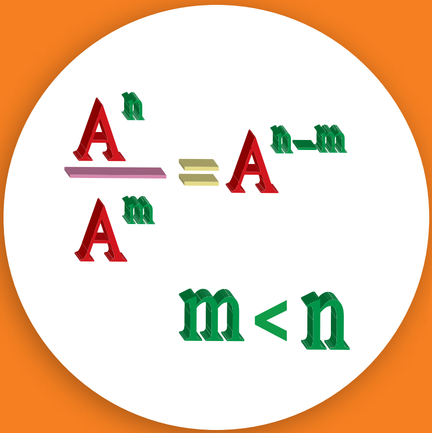
a) $(24)^9$ b) $(2 \times 3 \times 4)^3$ c) 9^3 d) $(24)^{27}$

5- $(4^2)^3$ مساوی است به:

a) 4^6 b) 48 c) 24 d) 4^5

تقسیم طاقت‌ها

برای پیدا کردن حاصل ضرب طاقت‌ها توانستیم قاعدهٔ عمومی را به دست آوریم. آیا می‌توانید برای تقسیم طاقت‌ها نیز چنین کاری را کنید؟



در مورد حاصل تقسیم $\frac{5^4}{5^2}$ چه گفته می‌توانید؟

$$\frac{5^4}{5^2} = \frac{\cancel{5}\times\cancel{5}\times5\times5}{\cancel{5}\times\cancel{5}} = 5\times5 = 5^2$$

حاصل تقسیم طاقت‌هایی که دارای عین قاعده باشند، مساوی است به یکی از قاعده‌ها به توان عددی که از تفریق توان‌های صورت و مخرج به دست می‌آید، به شرط آن که قاعده صفر نباشد.

مثال اول: حاصل تقسیم $\frac{8^7}{8^5}$ را به دست آورید.

حل:

$$\frac{8^7}{8^5} = 8^{7-5} = 8^2 = 64$$

فعالیت

خانه‌های خالی زیر را پر کنید:

$$\frac{8^4}{2^4} = \frac{\square\times\square\times\square\times\square}{\square\times\square\times\square\times\square} = \frac{\square}{\square}\times\frac{\square}{\square}\times\frac{\square}{\square}\times\frac{\square}{\square} = \left(\frac{\square}{\square}\right)^{\square} = (\square)^{\square}$$

در مورد حاصل تقسیم $\frac{8^4}{2^4}$ چه گفته می‌توانید؟

در تقسیم طاقت‌هایی که توان‌های مساوی و قاعده‌های مختلف داشته باشند، قاعدهٔ صورت را بالای قاعدهٔ مخرج تقسیم نموده و نتیجهٔ آن را به توان یکی از توان‌های مساوی می‌نویسیم.

مثال دوم: حاصل تقسیم $\frac{6^5}{3^5}$ را به دست آورید.

حل:

$$\frac{6^5}{3^5}=\frac{6\times6\times6\times6\times6}{3\times3\times3\times3\times3}=\frac{6}{3}\times\frac{6}{3}\times\frac{6}{3}\times\frac{6}{3}\times\frac{6}{3}=(\frac{6}{3})^5=2^5=32$$

تمرین

1- حاصل تقسیم زیر را به شکل عدد توان‌دار بنویسید.

$$\frac{9^6}{9^4}\quad,\quad\frac{7^4}{7^2}\quad,\quad\frac{8^6}{4^6}$$

2- ساده کنید و به شکل عدد توان‌دار بنویسید.

$$\frac{4^5\times6^3}{4^3\times6^2}\quad,\quad\frac{5^4\times5^3}{5^2\times5^2}\quad,\quad\frac{7^6\times7^4}{7^5\times7^2}$$

3- حاصل تقسیم زیر را دریابید.

$$\frac{8^{11}}{8^3}\qquad\frac{5^8}{5^3}$$

4- $\frac{2^4\times3^2}{4^2\times9}$ مساوی است به:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

روش علمی عددنویسی (Scientific notation method)



فاصلهٔ زمین از آفتاب طور اوسط مساوی است به: 149600000 Km

فاصلهٔ زهره از آفتاب طور اوسط مساوی است به: 108200000 Km

و فاصلهٔ زحل از آفتاب طور اوسط مساوی است به: 1427000 Km

آیا روش ساده‌تری را برای نوشتن این عددها می‌شناسید؟

فعالیت

- جاهای خالی زیر را پر کنید:

$$82000 = 8.2 \times \square = 8.2 \times 10^{\square}$$

$$235 = 2.35 \times \square = 2.35 \times 10^{\square}$$

$$73540 = 7.3540 \times \square = 7.3540 \times 10^{\square}$$

- آیا کار با اعداد بزرگ آسان است؟

اگر بتوانیم اعداد بزرگ را مختصر کنیم، کارهای ما چگونه آسان تر می‌شود؟

یک شکل مختصر عدد نویسی را معرفی می کنیم. در این طریقه یک عدد دو قسمت شده که در هم ضرب می‌شوند، قسمت اول عدد مساوی یا بزرگ‌تر از یک و کوچک‌تر از 10 و قسمت دوم یک طاقت با قاعدهٔ 10 می‌باشد. این روش مختصرنویسی را روش علمی عددنویسی (Scientific notation method) می‌نامند.

مثال اول: عدد 820000 را به روش علمی آن بنویسید.

حل:

عدد 8.2 از 10 کوچک‌تر و از یک بزرگ‌تر است، بر اساس روش علمی عددنویسی عدد 820000 مساوی است به: $820000 = 8.2 \times 100000 = 8.2 \times 10^5$

مثال دوم: اگر وزن یک طیاره 32500000 گرام باشد، این عدد را توسط روش علمی عددنویسی بنویسید.

$$\underset{\text{7 خانه}}{32500000} \rightarrow 3.25 \times 10^{7}$$

حل:

چون $32500000 = 3.25 \times 10^{7gr}$ گرام است؛ پس وزن این طیاره مساوی $3.25 \times 10^{4}\ gr$ می‌باشد.

مثال سوم: عدد 243×10^{3} را به طریق علمی عددنویسی بنویسید.

حل:

چون 243 از 10 بزرگ‌تر است؛ پس:

$$243 \times 10^{3} = (2.43 \times 10^{2}) \times 10^{3} = 2.43 \times 10^{5}$$

مثال چهارم: فاصلهٔ مهتاب از آفتاب $384400\ Km$ می‌باشد، این فاصله را به روش علمی عددنویسی می‌نویسیم که عبارت است از: $384400 = 3.844 \times 10^{5} Km$

آموختیم که: طریقهٔ علمی عددنویسی طوری است که یک عدد مساوی یا بزرگ‌تر از یک و کوچک‌تر از 10 را در یک طاقت که قاعدهٔ آن 10 می‌باشد، ضرب نموده می‌نویسیم.

تمرین

1- اعداد زیر را به شکل روش علمی عددنویسی بنویسید:

88.8×10^{11} ، 435.2×10^{3} ، 8540 ، 60230 ، 510 ، 511

2- عدد 88800000 به شکل روش علمی عددنویسی مساوی است به:

a) 8.88×10^{6} b) 8.88×10^{7} c) 8.88×10^{8}

3- عدد 512.3×10^{5} به شکل روش علمی عددنویسی مساوی است به:

a) 5.123×10^{2} b) 5.123×10^{7} c) 5.123×10^{5} d) 5.123×10^{4}

4- عدد 810000000000 به شکل روش علمی عددنویسی مساوی است به:

a) 8.1×10^{11} b) 8.1×10^{10} c) 8.1×10^{9} d) 8.1×10^{8}

5- فاصلهٔ عطارد از آفتاب $57900000\ Km$ می‌باشد، این فاصله را به روش علمی عددنویسی بنویسید.

بزرگ‌ترین قاسم مشترک یا بزرگ‌ترین فکتور مشترک
Greatest common divisor(G.C.D) or Highest common factor (H.C.F)



در یک صنف 36 شاگرد درس می‌خواندند. یک روز معلم ریاضی خواست شاگردانش را برای انجام کار گروهی در گروه‌های مساوی تقسیم کند؛ بگویید معلم گروه‌های چند نفری می‌تواند تشکیل دهد؟

قاسم(Divisor): اگر یک عدد طبیعی بالای عدد طبیعی دیگری پوره تقسیم شود، عدد دوم را قاسم عدد اولی می گویند؛ طور مثال: 24 بر 8 پوره تقسیم می‌شود، یعنی $24 \div 8=3$ بوده؛ پس عدد 8 یک قاسم 24 می‌باشد.

به همین ترتیب عدد 5 یک قاسم 30 و عدد 3 یک قاسم عدد 102 می‌باشد.

مثال اول: ست قاسم‌های عدد 12 عبارت است از: $\{1,2,3,4,6,12\}$ = ست قاسم های 12

مثال دوم: ست قاسم‌های 16 و 40 را دریابید.

حل: ست قاسم‌های 16 عبارت است از: $\{1,2,4,8,16\}$

و ست قاسم‌های 40 عبارت است از: $\{1,2,4,5,8,10,20,40\}$

فعالیت

- ست قاسم‌های 6 را دریابید.
- ست قاسم‌های 24 را دریابید
- کدام اعداد هم قاسم‌های 6 و هم قاسم‌های 24 استند؟
- ست قاسم‌های مشترک را با تقاطع ست ها نشان دهید.

قاسم مشترک (Common divisor) : اگر دو یا چندین عدد، بالای یک عدد، پوره قابل تقسیم باشند، این عدد را قاسم مشترک اعداد متذکره می گویند.

مثال سوم: ست قاسم‌های مشترک اعداد 16، 24 و 40 را دریابید.

حل:

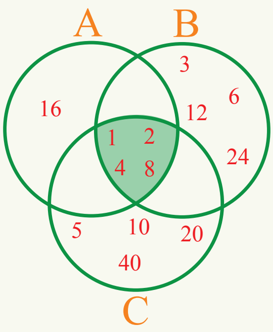
A = 16 ست قاسم های = $\{1,2,4,8,16\}$

B = 24 ست قاسم های = $\{1,2,3,4,6,8,12,24\}$

C = 40 ست قاسم های = $\{1,2,4,5,8,10,20,40\}$

ست قاسم‌های مشترک 16 ، 24 و 40 = $\{1,2,4,8,16\} \cap \{1,2,3,4,6,8,12,24\} \cap \{1,2,4,5,8,10,20,40\}$

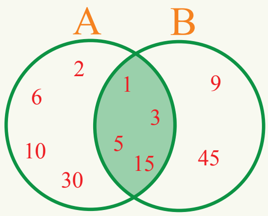
$= \{1,2,4,8\}$



ست قاسم‌های مشترک 16 ، 24 و 40 عبارت از $\{1,2,4,8\}$ بوده که تقاطع سه ست A، B و C می‌باشند که در شکل نیز نشان داده شده است. بدین معنی که هر سه عدد بر اعداد 8، 4، 2 و 1 پوره قابل تقسیم استند. دیده می‌شود که از جملهٔ قاسم‌های مشترک، عدد 8 از همه قاسم‌های مشترک بزرگ‌تر بوده، بنابراین عدد 8 بزرگ‌ترین قاسم مشترک 16، 24 و 40 می‌باشد.

مثال چهارم: بزرگ‌ترین قاسم مشترک اعداد 45 و 30 را دریابید.

حل: در شکل تقاطع دو ست A و B عبارت از قاسم‌های مشترک اعداد 30 و 45 می‌باشد.



ست قاسم‌های 30 = A $=\{1,2,3,5,6,10,15,30\}$

ست قاسم‌های 45 = B $=\{1,3,5,9,15,45\}$

ست‌قاسم‌های مشترک 30 و 45 $=\{1,2,3,5,6,10,15,30\} \cap \{1,3,5,9,15,45\}$

$=\{1,3,5,15\}$

چون عدد 15 از همهٔ قاسم‌های مشترک 45 و 30 بزرگ‌تر است، بنابراین 15 بزرگ‌ترین قاسم مشترک اعداد 45 و 30 می‌باشد.

آموختیم که: بزرگ‌ترین قاسم مشترک دو یا چند عدد باید:

1- قاسم مشترک این اعداد باشد. 2- از همهٔ قاسم‌های مشترک بزرگ‌تر باشد.

بزرگ‌ترین قاسم مشترک دو یا چند عدد عبارت از بزرگ‌ترین عددیست که اعداد داده شده بر آن پوره قابل تقسیم باشند.

تمرین

1- آیا 5 یک قاسم 35 است؟ چرا؟

2- آیا 4 یک قاسم 38 است؟ چرا؟

3- قاسم‌های مشترک و بزرگ‌ترین قاسم مشترک این اعداد را دریابید.

a) 24,32 b) 25,40 c) 50,52 d) 7,16

4- بزرگ‌ترین قاسم مشترک دو عدد اولیه چند است؟

دریافت بزرگ‌ترین قاسم مشترک توسط تجزیه



طول یک اتاق 910 سانتی‌متر، عرض آن 780 سانتی‌متر و ارتفاع آن 390 سانتی‌متر است. طویل‌ترین طول فیتهٔ متری را دریابید تا ابعاد این اتاق توسط آن پوره اندازه شود.

فعالیت

- قاسم‌های 36 و 24 را بنویسید. بزرگ‌ترین قاسم مشترک 16 و 36 را به دست آورید.
- اعداد 36 و 24 را به صورت ضرب اجزای ضربی اولیه بنویسید.
- کدام اجزای ضربی اولیه بین 36 و 24 مشترک است؟
- چه‌رابطه‌یی بین بزرگ‌ترین قاسم مشترک و اجزای ضربی اولیهٔ مشترک می‌توانید پیدا کنید؟

از فعالیت فوق می‌توان نتیجه گرفت که برای پیدا کردن بزرگ‌ترین قاسم مشترک توسط تجزیه مراحل زیر را باید انجام داد:

1- اعداد داده شده را به اجزای ضربی اولیه تجزیه نموده و آن‌ها را به شکل طاقت بنویسید.

2- اجزای ضربی مشترک را که کوچک‌ترین توان را داشته باشند در هم ضرب کنید. حاصل ضرب اجزای انتخاب شده عبارت از بزرگ‌ترین قاسم مشترک می‌باشد.

مثال: بزرگ‌ترین قاسم مشترک اعداد 208 و 390 را دریابید.

حل:

208	2
104	2
52	2
26	2
13	13
1	

$208 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 13 = 2^4 \times 13$

390	2
195	3
65	5
13	13
1	

$390 = 2 \times 3 \times 5 \times 13$

بنابراین بزرگ‌ترین قاسم مشترک 390 و 208 عبارت از $26 = 13 \times 2$ می‌باشد.
و یا در جدول زیر بزرگ‌ترین قاسم مشترک اعداد فوق را می‌توانیم چنین دریافت کنیم:

390	208	2
195	104	13
15	8	

بزرگ‌ترین قاسم مشترک عبارت از $26 = 13 \times 2$ است.

فعالیت

بزرگ‌ترین عددی را دریافت نمایید که اعداد 160، 208 و 324 بالای آن پوره قابل تقسیم باشند.

آموختیم که: برای تعیین بزرگ‌ترین قاسم مشترک دو یا چند عددتوسط تجزیه، ابتدا هر یک از این اعداد را به اجزای ضربی اولیه تجزیه نموده و به شکل طاقت می نویسیم؛ سپس اجزای ضربی مشترک اعداد را با کوچک‌ترین توان با هم ضرب می کنیم، که حاصل ضرب عبارت از بزرگ‌ترین قاسم مشترک این اعداد می‌باشد.

تمرین

1- بزرگ‌ترین قاسم مشترک $2^3 \times 3 \times 7$ و $2^5 \times 3^2$ عبارت است از:

a) $2^5 \times 3^2 \times 7$ b) $2^3 \times 3$ c) $2^5 \times 3^2$ d) 2×3

2- بزرگ‌ترین قاسم مشترک 45 و 56 مساوی است به:

a) 4 b) 6 c) هیچ کدام

3- بزرگ‌ترین قاسم مشترک اعداد زیر را دریابید.

a) 48 , 78 b) 13 , 15 c) 16,17 , 48 d) 18 ,25, 35

4- توسط عمل تجزیه، اول اجزای ضربی اولیه و سپس بزرگ‌ترین قاسم مشترک اعداد داده شدۀ زیر را دریابید.

a) 40,16 b) 18,42 c) 27,84 d) 36 ,60

5- بزرگ‌ترین قاسم مشترک 12 و 24 مساوی است به:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 12

کوچک‌ترین مضرب مشترک Least common multiple(L.C.M)



محیط حلقهٔ تایر کوچک تراکتور 360 سانتی متر و محیط حلقهٔ تایر بزرگ آن 600 سانتی‌متر است. تراکتور حد اقل چقدر فاصله را باید طی کند تا نقاط مشخص شده روی تایرها همزمان مجدداً با هم به زمین برسند؟

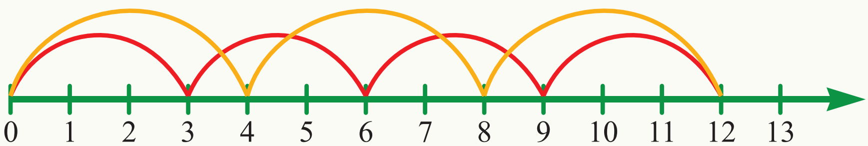
فعالیت

عدد 4 را در نظر بگیرید. این عدد را به ترتیب در 1,2,3,4,5,6 ضرب کنید.
خصوصیت مشترک تمام این اعداد چیست؟
آیا اعداد دیگری را می‌توانید پیدا کنید که این خصوصیت را داشته باشند؟

در فعالیت فوق دیدیم که اعداد به دست آمده بر عدد 4 پوره تقسیم می‌شوند. این اعداد را به نام مضرب‌های عدد 4 یاد می کنند. $\{4,8,12,16,20,...\}$ = ست مضرب های عدد4

فعالیت

- در جدول زیر مضرب‌های اعداد 3 و 4 را دریابید و خانه‌های جدول را پر کنید.



×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
3	3	6	9										...
4	4	8											...

- در مضرب‌های 3 و 4 کدام اعداد مشترک اند؟
- در مضرب‌های مشترک کوچک‌ترین مضرب مشترک 3 و 4 کدام عدد است؟

آیا تعداد مضرب‌های یک عدد طبیعی پایان دارند؟

مثال: کوچک‌ترین مضرب مشترک اعداد 6 ، 8 و 12 را دریابید.

حل: $A = \{6,12,18,24,30,36,42,48,\cdots\}$ = ست مضرب‌های عدد 6

$B = \{8,16,24,32,40,48,56,\cdots\}$ = ست مضرب‌های عدد 8

$C = \{12,24,36,48,60,72,\cdots\}$ = ست مضرب‌های عدد 12

$$(A \cap B) \cap C = \{24, 48 \cdots\}$$

ست مضرب‌های مشترک 6، 8 و 12 عبارت از {24,48,....} می‌باشد. کوچک‌ترین عنصر این ست 24 است؛ بنابراین کوچک‌ترین مضرب مشترک 6، 8 و 12 عبارت از 24 می‌باشد.

می توانیم کوچک‌ترین مضرب مشترک اعداد 6 ، 8 و 12 را در یک جدول به طور خلاصه به شکل زیر دریابیم:

2	6	8	12
2	3	4	6
3	3	2	3
	1	2	1

کوچک‌ترین مضرب مشترک این اعداد عبارت از $24 = 2 \times 3 \times 2 \times 2$ می‌باشد.

آموختیم که: در مضرب‌های مشترک دو یا چند عدد، کوچک‌ترین عدد، کوچک‌ترین مضرب مشترک اعداد داده شده می‌باشد.

تمرین

1- کوچک‌ترین مضرب مشترک اعداد 18 ، 20 و 36 را دریابید.

2- کوچک‌ترین عدد چهار رقمی را دریافت نمایید که بالای 10 ، 17 و 85 پوره تقسیم گردد.

3- کوچک‌ترین مضرب مشترک 6 و 9 مساوی است به: b) 54 a) 18

4- کدام عدد مضرب 9 است؟ b) 27 a) 3

5- اگر $17 \times 11 = 187$ باشد، کدام یک از بیانات زیر درست است؟

a) 187 مضرب 17 است. b) 187 قاسم 17 است.

6- کدام یک از این اعداد مضرب مشترک 6 و 9 است؟ b) 72 a) 69

7- کوچک‌ترین مضرب مشترک اعداد 15،9 و 4 را دریابید.

یافتن کوچک‌ترین مضرب مشترک توسط تجزیه به اعداد اولیه

$$\frac{7}{18} + \frac{3}{20}$$

در $\frac{3}{20} + \frac{7}{18}$ کدام عدد را می‌توان به عنوان مخرج مشترک تعیین کرد تا ساده‌تر به جواب رسید؟

فعالیت

- اعداد 18 و 20 را به صورت ضرب اجزای ضربی اولیه بنویسید.
- ست مضرب‌های 18 و 20 را بنویسید.
- کوچک‌ترین مضرب مشترک 18 و 20 را پیدا نموده و آن را به صورت اجزای ضربی اولیه بنویسید.

از اجرای فعالیت فوق دانستیم که برای پیدا کردن کوچک‌ترین مضرب مشترک دو یا چند عدد از طریق تجزیهٔ اجزای ضربی اولیه مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

1- اعداد داده شده را به اجزای ضربی اولیه، تجزیه نموده و به شکل طاقت می‌نویسیم.

2- آن عده اجزای ضربی مشترک را که بلندترین توان را دارا باشند با اجزای غیر مشترک ضرب می‌نماییم. این حاصل ضرب عبارت از کوچک‌ترین مضرب مشترک اعداد داده شده می‌باشد.

مثال: کوچک‌ترین مضرب مشترک 12 و 15 را توسط تجزیه به اعداد اولیه دریابید.

حل:

$12 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3$

$15 = 3 \times 5$

15	3
5	5
1	

12	2
6	2
3	3
1	

کوچک‌ترین مضرب مشترک 12 و 15 عبارت از: $2^2 \times 3 \times 5 = 60$ می‌باشد.

می توانیم کوچکترین مضرب مشترک اعداد 12 و 15 را در یک جدول نیز دریابیم.

15	12	3
5	4	

$3 \times 4 \times 5 = 60$

فعالیت

کوچک‌ترین مضرب مشترک اعداد 108 ، 135 و 162 را توسط جدول دریابید.

آموختیم که: برای تعیین کوچک‌ترین مضرب مشترک دو یا چند عدد توسط تجزیه، ابتدا هر یک از اعداد را به اجزای ضربی اولیه تجزیه نموده و به شکل طاقت می‌نویسیم؛ سپس همه اجزای ضربی اولیهٔ مشترک و غیر مشترک دو یا چند عدد را به بزرگ‌ترین توان ضرب می کنیم، که حاصل ضرب عبارت از کوچک‌ترین مضرب مشترک این اعداد می‌باشد.

تمرین

1- کوچک‌ترین مضرب مشترک اعداد 14 و 21 را توسط تجزیه دریابید.

2- کوچک‌ترین مضرب مشترک اعداد 9، 12، 15 و 36 را توسط تجزیه دریابید.

3- کوچک‌ترین عددی را دریابید که بر 64، 72، 96 و 192 قابل تقسیم باشد.

4- کوچک‌ترین مضرب مشترک 90، 56 و 35 عبارت است از:

a) $2 \times 3^2 \times 5$ b) $2^3 \times 5 \times 3^2 \times 7$

5- کوچک‌ترین مضرب مشترک اعداد 2^6 , $2^2 \times 3$, $2^2 \times 5$, $2^2 \times 3^2$, $3^2 \times 5$ و $2^4 \times 5$ مساوی است به:

a) 2800 b) 2880 c) 1880

6- کوچک‌ترین مضرب مشترک اعداد 15،18،30 و 54 مساوی است به:

a) 370 b) 270 c) 170

7- کوچک‌ترین عددی را دریابید که بر اعداد 25 , 15 و 30 پوره قابل تقسیم باشد.

8- کوچک‌ترین عددی را دریابید که بر اعداد 12, 18 , 40 و 50 پوره قابل تقسیم باشد.

موارد استعمال کوچک‌ترین مضرب مشترک و بزرگ‌ترین قاسم مشترک در حل مسائل روزمرۀ زنده‌گی



صفت الله بعد از هر 4 روز و عزت الله بعد از هر 6 روز غرض خریداری اجناس مورد ضرورت به مغازۀ شهر می‌روند. اگر آن‌ها به تاریخ 31 ماه سرطان در مغازۀ شهر با هم ببینند، به کدام تاریخ ماه اسد بار دوم در مغازۀ شهر یکدیگر را خواهند دید؟

فعالیت

- شکل سادۀ $\frac{36}{48}$ را بنویسید. (اختصار نمایید)
- اعداد 36 و 48 را به اجزای ضربی اولیه تجزیه کنید.
- بزرگ‌ترین قاسم مشترک 36 و 48 را پیدا کنید.
- عامل‌های ضربی اعداد 36 و 48 را طوری بنویسید که بزرگ‌ترین قاسم مشترک اعداد یکی از عامل‌های ضربی اعداد مذکور باشد.
- آیا می‌توانید برای ساده کردن کسرها توسط بزرگ‌ترین قاسم مشترک، روشی را پیشنهاد نمایید؟

مثال اول: کسر $\frac{30}{45}$ را با استفاده از دریافت بزرگ‌ترین قاسم مشترک اختصار نمایید.

حل: بزرگ‌ترین قاسم مشترک صورت (Numerator) و مخرج (Denominator) را دریافت می‌کنیم:

$30 = 2 \times 3 \times 5$

$45 = 3 \times 3 \times 5 = 3^2 \times 5$

بزرگ‌ترین قاسم مشترک 30 و 45 = $3 \times 5 = 15$

صورت و مخرج را بر عدد 15 تقسیم نموده، داریم:

$$\frac{30}{45} = \frac{30 \div 15}{45 \div 15} = \frac{2}{3}$$

مثال دوم: اگر زنگ اول هر 10 دقیقه بعد، زنگ دوم هر 15 دقیقه بعد، زنگ سوم هر 25 دقیقه بعد و زنگ چهارم هر 30 دقیقه بعد به صدا درآید، در صورتی که هر چهار زنگ به ساعت ده بجۀ، روز هم زمان شروع به زنگ زدن نمایند، معلوم نمایید که بعد از چه مدتی آن‌ها دوباره هم‌زمان به زنگ زدن شروع می‌کند؟

حل:

$10 = 5 \times 2$

$15 = 5 \times 3$

$25 = 5 \times 5$

$30 = 5 \times 3 \times 2$

پس: کوچکترین مضرب مشترک اعداد 10,15,25 و 30 عبارت است از: $2\times3\times5\times5=150$

و یا

30	25	15	10	2
15	25	15	5	3
5	25	5	5	5
1	5	1	1	

$2\times3\times5\times5=150$

در نتیجه 150 دقیقه(2 ساعت و 30 دقیقه) بعد هر چهار زنگ بار دوم همزمان به صدا در می آیند.

همچنین جواب سؤال ورودی را که دریافت کوچک‌ترین مضرب مشترک اعداد 4 و 6 است به دست می‌آوریم.

6	4	2
3	2	

$2 \times 2 \times 3 = 12$

یعنی(صفت الله و عزت الله) 12 روز بعد به تاریخ دوازدهم ماه اسد یکدیگر را بار دوم در مغازهٔ شهر ملاقات خواهند کرد.

تمرین

1-کسرهای زیر را با استفاده از بزرگ‌ترین قاسم مشترک صورت و مخرج اختصار نمایید.

$\frac{225}{300}$ ، $\frac{36}{80}$ ، $\frac{144}{360}$ ، $\frac{1084}{1355}$ ، $\frac{253}{275}$ ، $\frac{243}{1458}$ ، $\frac{623}{801}$

2- شاروالی در کنار سرک در هر 4 متر یک درخت را غرس نموده و ادارهٔ برق در هر 22 متر یک پایهٔ برق را نصب کرده است؛ اگر در شروع سرک پایهٔ برق در کنار درخت قرار گرفته باشد، بعد از چند متر دوباره یک درخت در کنار پایهٔ برق قرار می گیرد؟

3- نوریه هر سه روز بعد و ملالی هر پنج روز بعد به کتابخانه می‌روند؛ اگر هر دوی آن‌ها به تاریخ 10 ثور به کتابخانه رفته باشند در کدام تاریخ ماه ثور آن‌ها بار دوم در کتابخانه یک‌جا خواهند شد؟

رابطه بین کوچک‌ترین مضرب مشترک و بزرگ‌ترین قاسم مشترک دو عدد

اگر بزرگ‌ترین قاسم مشترک دو عدد را داشته باشیم، می‌توانیم کوچک‌ترین مضرب مشترک آن‌ها را بدون تجزیه، با نوشتن ست مضرب‌های شان به دست آوریم.

G = بزرگ‌ترین قاسم مشترک اعداد a و b

L = بزرگ‌ترین قاسم مشترک اعداد a و b

$$L=\frac{a\times b}{G}$$

فعالیت

- بزرگ‌ترین قاسم مشترک 25 و 15 را دریابید و آن را G بنامید.
- کوچک‌ترین مضرب مشترک این دو عدد را دریابید و آن را L بنامید.
- حاصل ضرب دو عدد 25 و 15 را به دست آورده و آن را با $L\times G$ مقاسیه کنید؛ آیا در بین این دو حاصل ضرب رابطه یی وجود دارد؟

اگر کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد a و b را به L و بزرگ‌ترین قاسم مشترک این دوعدد را به G نشان دهیم، در این صورت: رابطه بین بزرگ‌ترین قاسم مشترک و کوچک‌ترین مضرب مشترک عبارت است از: $L\times G=a\times b$

$$L=\frac{a\times b}{G}\qquad G=\frac{a\times b}{L}\qquad a=\frac{L\times G}{b}\qquad b=\frac{L\times G}{a}$$

مثال اول

ارتباط بین کوچکترین مضرب مشترک و بزرگترین قاسم مشترک دو عدد را در جدول زیر نیز مشاهده کرده می توانیم:

حاصل ضرب کوچکترین مضرب مشترک و بزرگترین قاسم مشترک	کوچکترین مضرب مشترک	بزرگترین قاسم مشترک	حاصل ضرب اعداد	عدد دوم	عدد اول
21	21	1	21	7	3
24	12	2	24	6	4
50	10	5	50	10	5
375	75	5	375	25	15
486	54	9	486	27	18

مثال دوم: بزرگ‌ترین قاسم مشترک اعداد 225 و 300 عبارت از 75 می‌باشد، کوچک‌ترین مضرب مشترک 225 و 300 را دریابید.

حل:

$a = 225$

$b = 300$

$G = 75$

$L = ?$

$$L = \frac{a \times b}{G} = \frac{225 \times 300}{75} = \frac{67500}{75} = 900$$

مثال سوم: کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد 900 و بزرگ‌ترین قاسم مشترک آن‌ها 75 است؛ اگر یک عدد 300 باشد، عدد دیگر را دریابید.

حل:

$b = 300$

$L = 900$

$G = 75$

$a = ?$

$$a = \frac{L \times G}{b} = \frac{900 \times 75}{300} = 225$$

تمرین

1- بزرگ‌ترین قاسم مشترک دو عدد، 29 و کوچک‌ترین مضرب مشترک آن‌ها 174 می‌باشد. اگر یک عدد 87 باشد، عددی دیگری را دریابید.

2- اگر حاصل ضرب دو عدد، 45000 و بزرگ‌ترین قاسم مشترک آن‌ها 150 باشد، کوچک‌ترین مضرب مشترک آن‌ها را دریابید.

3. اگر کوچک‌ترین مضرب مشترک 45 و 35 عدد 315 باشد، بزرگ‌ترین قاسم مشترک 45 و 35 را دریابید.

4- کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد، 900 و بزرگ‌ترین قاسم مشترک آن‌ها 75 است؛ اگر یک عدد 225 باشد عدد دیگری را دریابید.

5- بزرگ‌ترین قاسم مشترک دو عدد 10 و کوچک‌ترین مضرب مشترک آن‌ها 60 است؛ اگر یک عدد 30 باشد، عدد دیگری را دریابید.

6- حاصل ضرب بزرگ‌ترین قاسم مشترک و کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد 486 است، حاصل ضرب این دو عدد مساوی است به:

a) 982 b) 486 c) 243

دریافت همزمان کوچک‌ترین مضرب مشترک و بزرگ‌ترین قاسم مشترک دو عدد



آیا می‌توانید همزمان بزرگ‌ترین قاسم مشترک و کوچک‌ترین مضرب مشترک اعداد 72,45 و 81 را در یک جدول دریافت نمایید؟

بعد از تجزیهٔ این اعداد داریم که:

$72 = 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 = 3^2 \times 2^3$

$45 = 5 \times 3 \times 3 = 5 \times 3^2$

$81 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4$

در نتیجه کوچک‌ترین مضرب مشترک اعداد داده شده عبارت است از: $2^3 \times 3^4 \times 5 = 3240$
و بزرگ‌ترین قاسم مشترک اعداد داده شده $3^2 = 9$ می‌باشد و یا به طریق زیر در یک جدول نیز می‌توان دریافت کرد.

بزرگ‌ترین قاسم مشترک این اعداد عبارت است از $9 = 3 \times 3$ و کوچکترین مضرب مشترک این اعداد عبارت است از: $(3 \times 3) \times (9 \times 5 \times 8) = 3240$

3	81	45	72
3	27	15	24
	9	5	8

مثال: کوچک‌ترین مضرب مشترک و بزرگ‌ترین قاسم مشترک اعداد 225 و 100 را دریابید.

حل:

5	225	100
5	45	20
	9	4

در نتیجه بزرگ‌ترین قاسم مشترک این دو عدد مساوی به $25 = 5 \times 5$ ، و کوچک‌ترین مضرب مشترک آن‌ها مساوی است به : $5 \times 5 \times 9 \times 4 = 900$

مقایسهٔ کوچک‌ترین مضرب مشترک و بزرگ‌ترین قاسم مشترک

کوچک‌ترین مضرب مشترک	بزرگ‌ترین قاسم مشترک
همیشه بزرگ‌تر یا مساوی به یکی از اعداد داده شده می‌باشد.	همیشه کوچک‌تر و یا مساوی به یکی از اعداد داده شده می‌باشد.
کوچک‌ترین مضرب مشترک دو یا چندین عدد اولیه و یا دو عددی که قاسم مشترک نداشته باشند عبارت از حاصل ضرب اعداد می باشد.	بزرگ‌ترین قاسم مشترک دو یا چندین عدد اولیه و یا دو عددی که قاسم مشترک نداشته باشند همیشه یک است.
کوچک‌ترین مضرب مشترک دو یا چندین عدد بالای اعداد داده شده پوره قابل تقسیم می‌باشد.	بزرگ‌ترین قاسم مشترک دو یا چندین عدد، اعداد داده شده را بالای خود پوره تقسیم می‌نماید.

فعالیت

کوچک‌ترین مضرب مشترک و بزرگ‌ترین قاسم مشترک اعداد 27 و 9 را دریابید.

آموختیم که: غرض دریافت همزمان بزرگ‌ترین قاسم مشترک و کوچک‌ترین مضرب مشترک، اعداد داده شده را بر اعداد اولیه تقسیم می‌نماییم، حاصل ضرب اعداد اولیهٔ ستون طرف چپ عبارت از بزرگ‌ترین قاسم مشترک اعداد داده شده می‌باشد و اگر این حاصل ضرب را با اعداد سطر آخری ضرب نماییم؛ حاصل ضرب، کوچک‌ترین مضرب مشترک اعداد داده شده می‌باشد.

تمرین

بزرگ‌ترین قاسم مشترک وکوچک‌ترین مضرب مشترک اعداد زیر را در یک جدول دریابید:

1- بزرگ‌ترین قاسم مشترک و کوچک‌ترین مضرب مشترک اعداد 12 ، 20 و 36 را دریابید.

2- کوچکترین مضرب مشترک و بزرگ‌ترین قاسم مشترک اعداد 30 و 140 را دریابید.

3- کوچک‌ترین مضرب مشترک و بزرگ‌ترین قاسم مشترک اعداد 20 ، 16 و 44 را دریابید.

4- بزرگ‌ترین قاسم مشترک و کوچک‌ترین مضرب مشترک اعداد 81 و 27 را دریابید.

مربع و جذر مربع تام یک عدد طبیعی

اگر مساحت یک زمین مربعی 144 متر مربع باشد، طول یک ضلع این زمین را دریابید.



می‌دانیم که اگر یک عدد در خودش ضرب شود حاصل ضرب عبارت از مربع این عدد است.

فعالیت

جدول مقابل را تکمیل کنید.

عدد	2	6	11	15	20
مربع عدد	4				

در نتیجه؛ اگر هر یک از اعداد 2 ، 6 ،11 ، 15 و 20 دو مرتبه در خود شان ضرب شوند، به ترتیب اعداد 4 ، 36 ، 121 ، 225 و 400 حاصل می‌شوند. مشاهده می‌شود که هر عدد دارای دو جزء ضربی است که با هم مساوی می‌باشند.

$6^2 = 6 \times 6 = 36$ چون 36 توان دوم 6 ، است می گوییم که 6 جذر دوم 36 است، و آن را به این شکل نشان می‌دهیم $\sqrt{36} = 6$ که عدد 36 مجذور 6 می‌باشد.

به یاد داشته باشید که: به جای $\sqrt[2]{36}$ می‌توان $\sqrt{36}$ را نوشت.

یکی از دو جزء ضربی مساوی یک عدد، عبارت از جذر دوم و یا جذر مربع عدد می‌باشد.

فعالیت

جدول زیر را تکمیل کنید:

4	64	49	81	16	25			10	5	9	7
جذر	جذر	جذر	جذر	جذر	جذر	مجذور	مجذور	مجذور	مجذور	مجذور	مجذور
						36	64				

یادداشت: جذر دوم عدد یک، خود یک است.

آموختیم که: یکی از دو جزء ضربی مساوی یک عدد، جذر دوم عدد است؛ اما مجذور هر عدد توان دوم آن عدد می‌باشد.

تمرین

1- جذر دوم اعداد زیر را دریابید:

$\sqrt{64} = ?$, $\sqrt{256} = ?$, $\sqrt{144} = ?$, $\sqrt{121} = ?$

2- هرگاه مساحت یک مربع 49 سانتی‌متر مربع باشد، طول هر ضلع این مربع چند سانتی‌متر است؟

3- کدام یک از اعداد زیر مجذور کامل است؟

a) $2^4 \times 7^2$ b) $3^4 \times 7^3$

4- جذر مربع عدد 225 مساوی است به:

a) 16 b) 15

5- مجذور اعداد زیر را دریابید:

a) 9 b) 13 c) 15 d) 21

دریافت جذر مربع تام یک عدد طبیعی

به روش تجزیه، جذر مربع $2^4 \times 5^2$ چند می‌شود؟

$$\sqrt{2^4 \times 5^2} = ?$$

فعالیت

- هر یک از اعداد 36 , 144 و 64 را تجزیه کنید.
- جذر مربع هر یک از اعداد فوق را به دست آورید و به شکل ضرب اجزای ضربی اولیه بنویسید.
- در تجزیه از هر دو جزء ضربی مساوی، یکی را انتخاب کرده و آن‌ها را به صورت ضرب قرار دهید.

مثال: جذر مربع اعداد 400 و 3969 را توسط تجزیه دریابید.

حل:

400	2
200	2
100	2
50	2
25	5
5	5
1	

3969	3
1323	3
441	3
147	3
49	7
7	7
1	

پس:

$$\sqrt{400} = \sqrt{2^4 \times 5^2} = 2^2 \times 5 = 4 \times 5 = 20$$

$$\sqrt{3969} = \sqrt{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 7 \times 7} = \sqrt{3^4 \times 7^2} = 3^2 \times 7 = 3 \times 3 \times 7 = 63$$

یا $\sqrt{3969} = \sqrt{3\times3\times3\times3\times7\times7} = \sqrt{3^4\times7^2} = 3^2\times7 = 9\times7 = 63$

فعالیت

- جذر مربع اعداد 441 , 81 , 625 , 225 و 1225 را توسط تجزیه دریابید.
- کدام یک از اعداد زیر مجذور کامل است؟

a) 144 b) 180

آموختیم که: در نتیجهٔ تجزیه از هر دو جزء ضربی مساوی، یکی را انتخاب و آن‌ها را باهم ضرب می کنیم، حاصل ضرب، جذر دوم یا جذر مربع عدد می‌باشد؛ پس از تجزیه اگر توان‌های اجزای ضربی یک عدد جفت باشد، عدد مجذور کامل است. به بیان دیگر، برای پیدا کردن جذر مربع یک عدد کافی است توان هر یک از اجزای اولیهٔ ضربی را نصف نموده؛ سپس آن‌ها را در هم ضرب کنیم.

تمرین

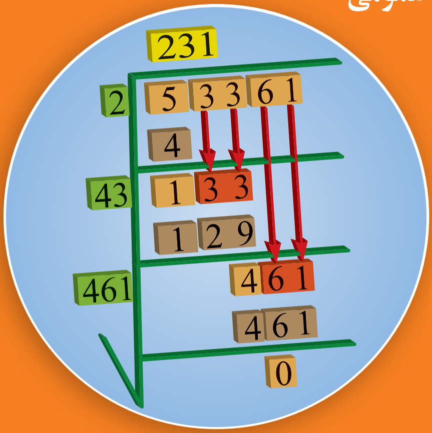
1- جذر مربع اعداد زیر را به روش تجزیه پیدا کنید.

3136 ، 2025 ، 1024

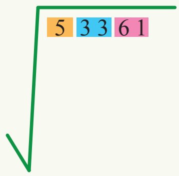
2- چون $\sqrt{81} = 9$ است، جذر عدد $\sqrt{810000}$ مساوی به چند است؟

a) 90 b) 900 c) 9

یافتن جذر مربع یک عدد توسط طریقهٔ عمومی



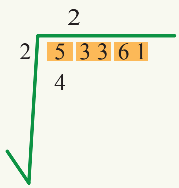
دریافت جذر مربع اعداد بزرگ‌تر توسط تجزیه وقت زیادی را در برمی گیرد؛ اما جذر مربع این اعداد را می‌توانیم توسط روش عمومی آسان‌تر به دست آوریم.



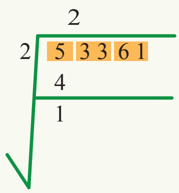
مثال اول: جذر مربع عدد 53361 را به طریق عمومی به صورت زیر به دست می‌آوریم.

قدم 1: عدد داده شده را زیر علامت جذر مانند مقابل قرار می‌دهیم.

قدم2: از عدد زیر جذر دو، دو رقم از راست به طرف چپ جدا نموده که بالآخره عدد آخری یک رقمی یا دو رقمی باقی می‌ماند، که در این مثال عدد آخری، عدد 5 است.



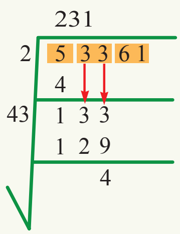
قدم3: حال عددی را دریافت می‌نماییم که با ضرب آن در نفس خودش مساوی به 5 و یا کمتر از آن باشد. در این مثال همچو عدد مطلوب عبارت از 2 می‌باشد، بنابرین عدد 2 را در دو جای، یک‌بار بالای خط افقی جذر و یک‌بار کنار عدد 5 طرف چپ خط عمودی می‌نویسیم.



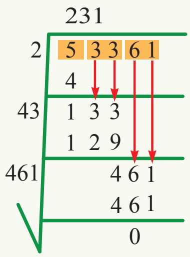
قدم 4: عدد 2 را در 2 ضرب نموده، حاصل را زیر عدد 5 نوشته از 5 تفریق می‌نماییم که در این صورت باقی‌مانده 1 می‌باشد.

قدم 5: حال دو رقم دیگر، یعنی 33 را پهلوی 1 نوشته عدد 133 حاصل می گردد.

عدد 2 را که در بالای خط افقی قرار دارد، دوچند نموده در مقابل عدد 133 به طرف چپ خط عمودی که در موقعیت رقم دهاً قرار می گیرد می‌نویسیم.



قدم6: برای پیدا نمودن رقم یک‌ها این عدد، از عدد 133 رقم یک‌ها را موقتاً نادیده گرفته و باقی‌مانده (عدد 13) را بالای 4 تقسیم نموده، 3 حاصل می گردد. عدد حاصلهٔ 3 را پهلوی 4 در رقم یک‌ها و همچنان به طرف راست 2 بالای خط افقی(طرف راست عدد 2) نوشته، طوری



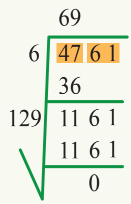
عمل می‌نماییم که با ضرب 3 در عدد به دست‌آمدهٔ دو رقمی 43 نتیجهٔ حاصله مساوی یا کمتر از عدد 133 گردد.

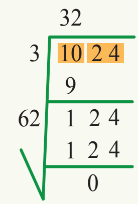
در این حالت مطلوب از حاصل ضرب 3 در 43 بوده و حاصل ضرب 129 را از 133 تفریق می‌نماییم که عدد 4 باقی می‌ماند.

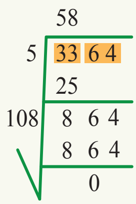
قدم7: حال دو رقم دیگر، یعنی 61 را پایین نموده به طرف راست عدد 4 می‌نویسیم که 461 می‌شود؛ عدد 23 را که بالای خط افقی قرار دارد دو چند نموده که 46 می‌شود و مانند قدم بالا به طرف چپ خط عمودی می‌نویسیم. با نادیده گرفتن عدد 1 می‌بینیم که 46 تقسیم 46 مساوی به 1 است، آن را بالای خط افقی و به طرف راست رقم 3 نوشته و مانند بالا عمل می‌نماییم؛ یعنی با ضرب 1 در 461 عدد 461 به دست می‌آید که حاصل تفریق شان مساوی به صفر می‌باشد؛ بدین ترتیب، جذر دوم عدد 53361 که 231 می‌باشد به دست می‌آید؛ یعنی $\sqrt{53361} = 231$ می‌باشد.

مثال دوم: جذر مربع اعداد 3364 ، 1024 و 4761 را توسط روش عمومی دریابید.

حل:







در نتیجه:

$\sqrt{4761} = 69$ $\sqrt{1024} = 32$ $\sqrt{3364} = 58$

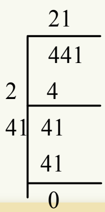
فعالیت

جذر مربع اعداد طبیعی 784، 3600 و 1444 را به طریقهٔ عمومی دریابید.

مثال سوم: هرگاه مساحت یک زمین مربعی 441 متر مربع باشد، طول یک ضلع این زمین را دریابید.

حل: با استفاده از هندسه می‌دانیم که مساحت مربع = ضلع × ضلع می‌باشد.

یک ضلع این زمین مربع شکل 21 متر می‌باشد.



$\Rightarrow \sqrt{441} = 21$

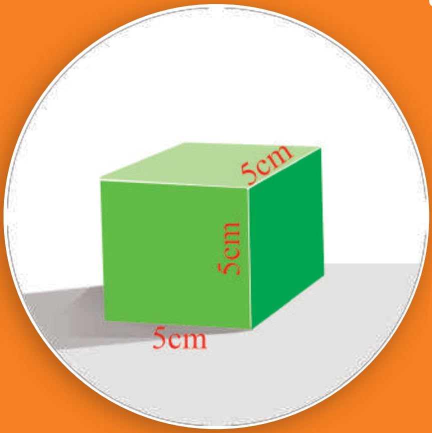
تمرین

1- جذرهای دوم اعداد زیر را اول به طریقهٔ تجزیه؛ سپس به روش عمومی دریابید، و بگویید که کدام روش را ترجیح می‌دهید؟

225 , 324 , 2025

729 , 5184 , 121

جذر سوم(مکعب) یک عدد طبیعی



حجم یک مکعب $125cm^3$ است؛ ابعاد آن چند است؟

چنان‌چه جذر مربع یک عدد طبیعی، یکی از دو جزء ضربی مساوی عدد می‌باشد؛ بدین اساس جذر مکعب یا جذر سوم یک عدد طبیعی را این طور تعریف می‌کنیم:

تعریف: یکی از سه جزء ضربی مساوی یک عدد را جذر سوم عدد می‌گویند.

علامت $\sqrt[3]{\ }$ جذر سوم یک عدد را نشان می‌دهد.

مثال اول: جذرهای سوم این اعداد را دریابید: $\sqrt[3]{64}$, $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[3]{27}$

حل:

$$27 = 3\times3\times3 = 3^3 \Rightarrow \sqrt[3]{27} = 3$$

$$8 = 2\times2\times2 = 2^3 \Rightarrow \sqrt[3]{8} = 2$$

$$64 = 4\times4\times4 = 4^3 \Rightarrow \sqrt[3]{64} = 4$$

دریافت جذر سوم تام اعداد طبیعی توسط تجزیه:

عدد را به اجزای مساوی اولیهٔ ضربی تجزیه نموده و از هر سه جزء مساوی یک جزء را انتخاب و با هم ضرب می‌کنیم؛ در نتیجه حاصل ضرب عبارت از جذر سوم عدد می‌باشد.

مثال دوم: جذرهای سوم اعداد طبیعی 125، 8 و 27000 را توسط تجزیه دریابید.

حل:

2	27000
2	13500
2	6750
3	3375
3	1125
3	375
5	125
5	25
5	5
	1

$$\sqrt[3]{27000} = 2\times3\times5 = 30$$

5	125
5	25
5	5
	1

$$\sqrt[3]{125} = 5$$

2	8
2	4
2	2
	1

$$\sqrt[3]{8} = 2$$

فعالیت

جذر سوم اعداد 1331 و 8000 را توسط تجزیه دریابید.

یکی از سه جزء ضربی مساوی یک عدد را جذر سوم عدد می گویند.

تمرین

1- جذرهای مکعب تام اعداد طبیعی زیر را توسط تجزیه دریابید:

$\sqrt[3]{729}$, $\sqrt[3]{216}$, $\sqrt[3]{125000}$

2- جذرهای مکعب تام اعداد طبیعی زیر را توسط تجزیه دریابید:

$\sqrt[3]{5832}$, $\sqrt[3]{1331}$, $\sqrt[3]{2744}$

3- جذر سوم(جذر مکعب) عدد 729000 مساوی است به:

a) 100 b) 150 c) 90

4- جذر سوم عدد $2^6 \times 3^3 \times 4^3$ مساوی است به:

a) 48 b) 24 c) 12

5- جذر سوم عدد $10^2 \times 10^2 \times 10^2$ مساوی است به:

a) 10 b) 100 c) 1000 d) 10^3

6- جذر سوم عدد 343 مساوی است به:

a) 8 b) 7

7- جذر سوم عدد 1728 مساوی است به:

a) 12 b) 11

8- جذر سوم عدد 512 مساوی است به:

a) 7 b) 8

خلاصۀ فصل دوم

- خاصیت‌هــای اتحادی و تبدیلی در عملیه‌های جمع و ضرب اعداد طبیعی صدق می کنند، صفــر در عملیــۀ جمع اعــداد طبیعی و یــک در عملیۀ ضرب اعــداد طبیعــی عنصر عینیت می‌باشد.
- اعدادی که رقم یک‌ها آن‌ها صفر باشد، بر 2,5 و 10 پوره قابل تقسیم اند.
- اعدادی که رقم یک‌ها آن صفر یا جفت باشد، بر 2 پوره قابل تقسیم اند.
- اعدادی که رقم یک‌ها آن صفر یا 5 باشد، بر 5 پوره قابل تقسیم اند.
- اعدادی که مجموع ارقام آن بر 3 پوره قابل تقسیم باشد بر 3 پوره تقسیم می‌شوند.
- اعدادی که بر 2 و 3 پوره قابل تقسیم استند، بر 6 نیز پوره قابل تقسیم می‌باشند.
- اعدادی که بر 2 و 6 پوره قابل تقسیم باشند، بر 12 نیز پوره تقسیم می‌شوند.
- اعدادی که تنها بریک و خود شان قابل تقسیم باشند، اعداد اولیه اند.
- عددی که علاوه بر خود و یک بر اعداد دیگری نیز پوره قابل تقسیم باشد، عدد مرکب (تجزیه پذیر) است.
- هر عدد اولیه تنها دو قاسم داردکه عبارت از عدد یک و خودش می‌باشد.
- 2 تنها عدد جفت است که اولیه می‌باشد.
- یک عدد مرکب کم از کم 3 جزء ضربی دارد.
- یافتن اجزای ضربی اولیۀ یک عدد مرکب به نام تجزیه به اعداد اولیه یاد می‌شود و این تجزیه، یگانه است.
- تجزیه به اجزای ضربی اولیۀ موارد استعمال زیادی دارد و بیش از همه در دریافت کوچک‌ترین مضرب مشترک، بزرگ‌ترین قاسم مشترک و جذرهای دوم و سوم اعداد از آن کار گرفته می شود.
- کوتاه‌ترین روش نشان دادن حاصل ضرب تکرار یک عدد را طاقت یا عدد توان‌دار می‌نامند.
- در 5^3 عدد 5 قاعده، 3 توان‌نما و 5^3 عبارت از طاقت می‌باشد.
- در ضرب طاقت‌هایی که دارای قاعده‌های مساوی و توان‌های مختلف باشند، حاصل ضرب آن‌ها مساوی به قاعدۀ مشترک به توان حاصل جمع توان‌های داده شده می‌باشد.
- حاصل تقسیم طاقت‌هایی که دارای عین قاعده و توان‌های مختلف باشند، مساوی می‌باشد به یکی از قاعده‌ها به توان عددی که از تفریق توان‌های صورت و مخرج به دست می‌آید به شرط آن که قاعده صفر نباشد.
- اگر یک عدد توان‌دار به توان برسد، قاعده را به توان حاصل ضرب‌های دو توان می‌نویسیم.
- در ضرب طاقت‌هایی که توان‌های مساوی و قاعده‌های مختلف داشته باشند، قاعده‌ها با هم ضرب گردیده و به یکی از توان‌های مساوی نوشته می‌شوند.
- در تقسیم طاقت‌هایی که توان‌های مساوی و قاعده‌های مختلف دارند، قاعدۀ صورت را

بالای قاعدهٔ مخرج تقسیم و نتیجه آن را به توان یکی از توان‌های مساوی می‌نویسیم.

- اعداد بزرگ طبیعی را می توان توسط روش علمی عددنویسی ارائه نمود.
- بزرگ‌ترین قاسم مشترک دو یا چندین عدد طبیعی عبارت از بزرگ‌ترین اجزای ضربی مشترک آن‌ها می‌باشد.
- بزرگ‌ترین قاسم مشترک دو یا چندین عدد طبیعی را توسط ست قاسم‌ها و تجزیه می توان دریافت کرد.
- بزرگ‌ترین قاسم مشترک دو عدد طبیعی، کوچک‌تر و یا مساوی به یکی از این دو عدد می‌باشد.
- کوچک‌ترین مضرب مشترک دو یا چند عدد طبیعی، عبارت از کوچک‌ترین عددی است که در عین وقت بالای دو یا چندین عدد طبیعی قابل تقسیم بوده و یگانه است.
- کوچک‌ترین مضرب مشترک اعداد طبیعی را توسط ست مضرب‌ها و تجزیه دریافت کرده می توانیم.
- بین دو عدد طبیعی a و b و کوچک‌ترین مضرب مشترک (L.C.M) و بزرگ‌ترین قاسم مشترک (G.C.D) رابطهٔ زیر موجود است:

$$L.C.M = \frac{a \times b}{G.C.D}$$

$$G.C.D = \frac{a \times b}{L.C.M} \quad \text{یا} \quad G \times L = a \times b$$

- کوچک‌ترین مضرب مشترک دو یا چندین عدد اولیه و یا دو عددی که قاسم مشترک آن‌ها فقط یک است، عبارت از حاصل ضرب اعداد می‌باشد.
- کوچک‌ترین مضرب یک عدد طبیعی همیشه بزرگ‌تر و یا مساوی به عدد می‌باشد.
- مضرب یک عدد طبیعی بالای خود عدد پوره تقسیم می‌شود.
- مضرب‌های یک عدد طبیعی قابل شمارش نمی‌باشند.
- یکی از دو جزء مساوی یک عدد طبیعی عبارت از جذر دوم (جذر مربع) عدد می‌باشد.
- جذر مربع اعداد طبیعی را توسط تجزیه و روش عمومی جذر مربع به دست آورده می توانیم.
- یکی از سه جزء ضربی مساوی یک عدد طبیعی، عبارت از جذر سوم یا جذر مکعب عدد می‌باشد.

تمرین فصل دوم

1- اعداد زیر را به اجزای ضربی اولیه تجزیه نمایید:

168　858　1122　1024　1656　8000　3206

30030　38　54　116　66

2- حاصل ضرب‌های زیر را به شکل یک طاقت (عدد توان‌دار) بنویسید:

$4^2 \times 4^3 \times 4^4$　$5 \times 5^2 \times 5^3 \times 5^4$　$2^4 \times 3^4 \times 4^4$

3- حاصل تقسیم‌های زیر را به شکل یک طاقت (عدد توان‌دار) بنویسید:

$\frac{8^{11}}{2^{11}}$　$\frac{(36)^8}{9^8}$　$\frac{(121)^9}{(11)^9}$　$\frac{9^{11}}{9^3}$

4- اعداد زیر را به روش علمی عددنویسی ارائه نمایید:

112.2×10^3　25.48　1001　350　4000

5 - بزرگ‌ترین قاسم مشترک اعداد زیر را توسط تجزیه به اجزای ضربی اولیه دریابید:

36 , 162　580 , 1160　405 , 495

6 – بزرگ‌ترین قاسم مشترک اعداد طبیعی زیر را توسط تجزیه دریابید:

24,96,48　175,315　324,225

7- توسط تجزیه به اجزای ضربی اولیه، کوچک‌ترین مضرب مشترک اعداد طبیعی زیر را دریابید:

12,32,40,45,72,75　175,200,225,250,300　132,165,198,220

8- کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد، 2920 و بزرگ‌ترین قاسم مشترک آن‌ها 4 است؛ اگر یک عدد 40 باشد عدد دیگری را دریابید.

9- کوچک‌ترین عدد طبیعی را دریابید که اگر بالای 12، 16 و 18 تقسیم شود در هر صورت 8 باقی بماند.

10- کوچک‌ترین عدد طبیعی را دریابید که اگر بالای 15، 21 ، 28 و 49 تقسیم شود در هر صورت 4 باقی بماند.

11- جذر مربع اعداد $\sqrt{2809}$ و $\sqrt{5329}$ را دریابید.

12- در یک باغ در هر قطار به تعداد قطارها درخت غرس شده است؛ اگر تعداد درخت‌ها در باغ 1369 عدد باشد، تعداد درخت‌ها را در هر قطار و نیز تعداد قطارها را معلوم کنید.

13- مساحت یک زمین مربع شکل 9216 متر مربع است؛ طول هر ضلع زمین را دریابید.

14- اگر مساحت زمین مربعی 1444 متر مربع بوده‌باشد ، طول هر ضلع زمین را دریابید.

15- جذر مربع اعداد $\sqrt{1002001}$, $\sqrt{10201}$, $\sqrt{42025}$ را توسط طریقهٔ عمومی دریابید.

16- اگر 6561 موتر طوری در قطارهای مستقیم قرار داشته باشند که تعداد موترهای هر قطار مساوی به تعداد قطارها باشد تعداد موترها در هر قطار و نیز تعداد قطارها را معلوم کنید.

17- در یک باغ اگر در هر قطار مستقیم تعداد درخت‌ها مساوی، به تعداد قطارها باشند و در باغ مجموعاً 1936 درخت وجود داشته باشد، تعداد درخت‌ها را در هر قطار و نیز تعداد قطارها را معلوم کنید.

18- جذر مربع اعداد طبیعی زیر را دریابید.

$\sqrt{324}$ $\quad \sqrt{1296}$ $\quad \sqrt{3364}$ $\quad \sqrt{1024}$

$\sqrt{14161}$ $\quad \sqrt{9025}$ $\quad \sqrt{4761}$ $\quad \sqrt{996004}$

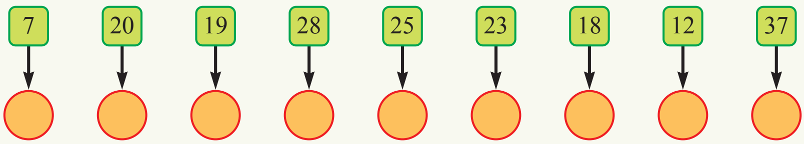
19- جذر مکعب تام اعداد طبیعی زیر را دریابید.

$\sqrt[3]{8000}$ $\quad \sqrt[3]{2197}$

$\sqrt[3]{1000}$ $\quad \sqrt[3]{1000000}$

$\sqrt[3]{64000000}$

20- دور اعداد اولیه یک دایره بکشید و در دایرهٔ زیر هر عدد، برای آن یک جزء ضربی اولیه بنویسید.



21- جذر مربع $2^6 \times 3^2$ مساوی است به:

a) 24 b) 64 c) 9 d) 20

22- بزرگ‌ترین قاسم مشترک اعداد 140 و 112 مساوی است به:

a) 28 b) 14 c) 54 d) 7

23- کوچک‌ترین مضرب مشترک اعداد 15, 9, 5 و 20 مساوی است به:

a) 90 b) 180 c) 360 d) 720

24- مجذور عدد $2^3 \times 3$ مساوی است به:

a) $2^4 \times 3^2$ b) $2^6 \times 3$ c) $2^6 \times 3^2$ d) $2^6 \times 3^3$

25- کوچک‌ترین مضرب مشترک اعداد $2^3 \times 7$ ، $2 \times 3^2 \times 5$ و $2 \times 5^2 \times 7$ مساوی است به:

a) 12600 b) $2^3 \times 5^2 \times 3^2 \times 7$ c) هر دو درست اند

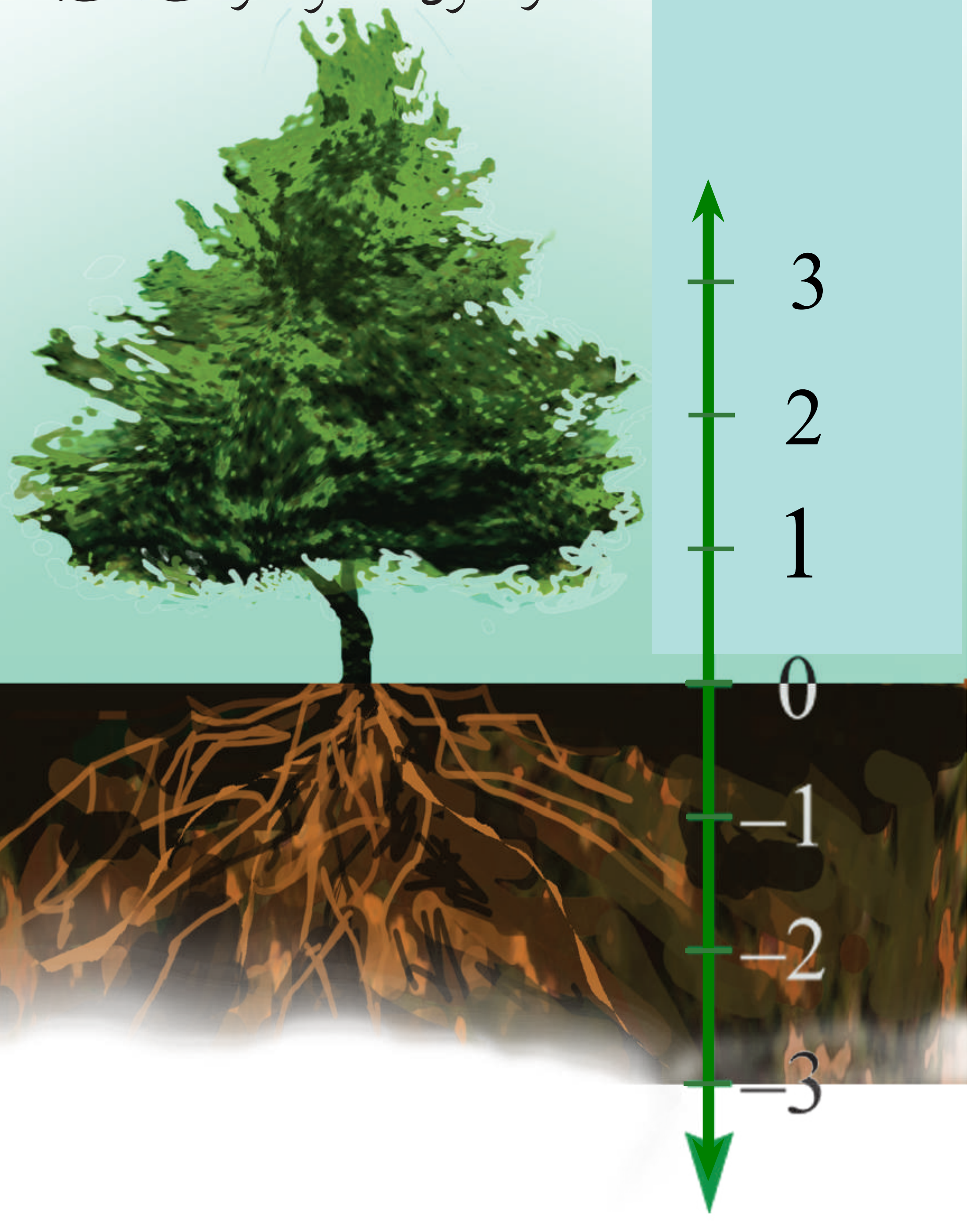
26- کوچک‌ترین مضرب مشترک $2^4 \times 3^2 \times 7^3$ و $2^5 \times 3$ مساوی است به:

a) $2^5 \times 3^2 \times 7^3$ b) $2^4 \times 3$

فصل سوم

اعداد تام

طول ریشهٔ برخی درختان حتی به اندازهٔ طول قد خود درخت است.



اعداد مثبت و منفی

$$5 - 7 = ?$$



در بحث‌های قبلی با اعداد طبیعی که برای شمارش اشیا و همچنان اعداد مکمل که متشکل از اعداد طبیعی و صفر است، آشنایی حاصل نموده اید؛ اما سؤال فوق نشان می‌دهد که اعداد طبیعی و مکمل برای حل مسائل کافی نیستند، از همین بابت بشر در طول تاریخ با مشکلات فراوان مواجه شده است. بنابر همین نیازمندی‌ها اعداد تام به میان آمده است. شما این اعداد را روی ترمامتر در شکل بالا می‌بینید و طوری که می‌دانید: ترمامتر وسیله‌یی است که برای اندازه گیری درجهٔ حرارت به کار می‌رود.

در ترمامتر اعداد بالاتر از صفر، اعداد مثبت(بزرگ‌تر از صفر) واعداد پایین‌تر از صفر، اعداد منفی(کوچک‌تر از صفر) و عدد صفر قرار دارند.

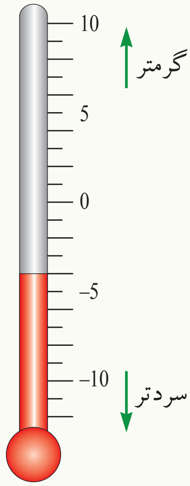
اعداد بزرگ‌تر از صفر را با علامت مثبت (+) و اعداد کوچک‌تر از صفر را با علامت منفی(–) نشان می‌دهند. عددی که علامت ندارد، مثبت است. آیا گاهی فکر کرده اید که عددهای مثبت و عددهای منفی در روی ترمامتر چه چیزی را نشان می‌دهند؟

مثال: اگر ادارهٔ هواشناسی در شروع فصل زمستان از طریق رادیو خبر دهد که:
کابل 5 درجهٔ سانتی گرید بالای صفر، بامیان 8 درجه زیر صفر، جلال آباد 10 درجه بالای صفر، هرات صفر درجه، قندهار 9 درجه بالای صفر، غزنی 5 درجه زیر صفر، مزار شریف 2 درجه بالای صفر و سالنگ شمالی 9 درجه زیر صفرباشد. برای نشان دادن این اعداد، از عددهای علامت‌دار (اعداد تام) استفاده می‌کنند. طور مثال برای نمایش درجهٔ حرارت بامیان 8– وکابل 5+ به کار برده می‌شود که به طور نمونه در جدول زیر نشان داده شده است. با در نظرداشت طرز ارائه فوق جدول زیر را تکمیل نمایید.

کابل	جلال آباد	بامیان	هرات	قندهار	مزار شریف	غزنی	سالنگ شمالی
$+5^\circ C$		$-8^\circ C$					

فعالیت

با در نظر داشت تکمیل جدول صفحهٔ قبل، موقعیت اعداد داده شده را روی ترمامتر نشان دهید.



طبق معمول 4 درجهٔ زیر صفر را به صورت((**4−**)) و 4 درجهٔ بالای صفر را به صورت ((**4+**)) می‌نویسند.

– عدد علامت‌دار ((**4−**)) را **منفی چهار**

و عدد علامت‌دار ((**4+**)) را **مثبت چهار** می‌خوانیم.

تمرین

1– اگر درجهٔ حرارت در کابل 6+ درجهٔ سانتی گرید و در سالنگ 6− درجهٔ سانتی گرید باشد، با نگاه کردن به ترمامتر بگویید که این دو شهر چند درجهٔ حرارت از همدیگر فرق دارند؟

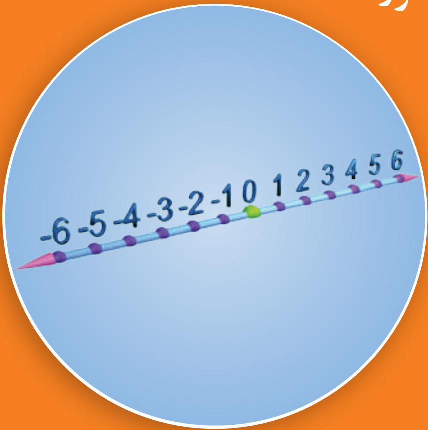
2– یک خط عمودی رسم نموده، مانند ترمامتر آن را طوری درجه‌بندی کنید که در آن اعداد مثبت، صفر و اعداد منفی وجود داشته باشند.

3– درجهٔ حرارت چند شهر افغانستان در یک روز زمستانی چنین اعلان شده است:

کابل 5 درجه بالای صفر، هرات صفر درجه، قندهار 16 درجه بالای صفر، بامیان 5 درجه زیر صفر، غزنی 4 درجه زیر صفر و سالنگ جنوبی 8 درجه زیر صفر باشد. اکنون شهرهای متذکره را از سردترین به گرم‌ترین شهر با درجهٔ حرارت شان از چپ به راست، در جدول زیر ترتیب نمایید.

						شهرها
						درجهٔ حرارت

اعداد تام و نمایش آن‌ها روی محور اعداد



$$\ldots, \overset{?}{\square}, \overset{?}{\square}, \overset{?}{\square}, 0, +1, +2, +3, +4, \ldots$$

همان طور که دیده می‌شود اعداد فوق از طرف چپ به راست یک یک واحد زیاد و از راست به چپ یک، یک واحد کم می گردند.
آیا خانه‌های خالی فوق را که زیر علامت سؤالیه قرار دارند، می توانید با عدد مناسب پر کنید؟

تا به حال مفهوم اعداد علامت‌دار (اعداد مثبت و اعداد منفی) را آموخته اید. اکنون بر اساس همین اعداد علامت‌دار می‌توانیم اعداد تام را به قرار زیر معرفی نماییم:

اعداد تام (Integers numbers)

$$\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, \ldots$$

اعداد بالا را به نام اعداد تام یاد می‌نمایند.

ست یا مجموعهٔ اعداد تام را قرار زیر نشان می‌دهند.

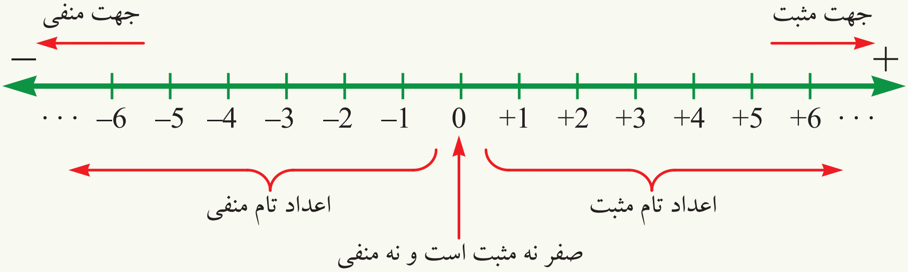
$$I = \{\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, \ldots\}$$

نمایش اعداد تام روی محور اعداد:

برای آسانی کار، ست اعداد تام را روی یک محور نشان می‌دهیم، طوری که ابتدا یک خط را رسم نموده، سپس یک نقطهٔ کیفی را روی خط به حیث مبدا در نظر گرفته، با عدد **صفر**(0) نشانی می کنیم. اکنون امتداد دو(جهت) خط متذکره را در اختیار داریم، یعنی: از مبداء به جهت راست و از مبدا به جهت چپ.

اعدادی که به طرف راست مبدا (صفر) روی خط قرار دارند با علامت (+) و اعدادی که به طرف چپ مبدا روی خط قرار دارند، با علامت(−) مشخص می کنیم.

بنابرین طرف راست این خط(طرف راست مبدا)، اعداد **مثبت** و طرف چپ این خط(طرف چپ مبدا)، اعداد **منفی** را نشان می‌دهیم. مبدا این خط صفر است نه مثبت و نه منفی می‌باشد. این خط را **محور اعداد** می گویند.



فعالیت

محور اعداد را به صورت عمودی رسم کنید، نقطه یی را روی آن مبدأ فرض نموده جهت بالا را با علامت (+) و جهت پایین را با علامت(−) مشخص نمایید و اعداد تام را از −6 تا +6 روی آن نشان دهید.

آموختیم که: محور اعداد عبارت از خط جهت داری است که در روی آن می توانیم اعداد تام مثبت، صفر و اعداد تام منفی را نشان دهیم. محور اعداد دارای دو جهت است که:

- سمت راست محور را جهت مثبت
- سمت چپ محور را جهت منفی انتخاب کرده‌اند.

تمرین

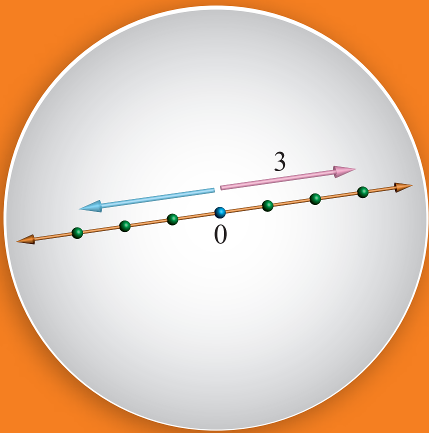
1− در شکل زیر برای هر نشانی، یک عدد علامت دار را بنویسید.



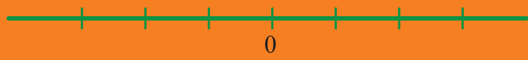
2− یک محور را رسم نموده و اعداد تام را از −5 تا +5 روی آن نشان دهید.

3− اعداد تام +3 ، −3 ، +5 ، 0 ، −1 و +8 راروی محور اعداد نشان دهید.

قیمت مطلقهٔ یک عدد



آیا می توانید نقطه یی را کــه از مبدأ به اندازهٔ 3 واحد فاصله دارد، روی شـکل زیر نشـان دهید؟



سـؤال: اگر هوای بامیان 5− درجهٔ سـانتی گرید و درجه حرارت سالنگ شمال 8− درجهٔ سـانتی گرید باشـد، کدام یک بیشتر سرد اسـت؟ اگر هوای کابل 8+ درجهٔ سانتی گرید و هوای قندهار 16+ درجهٔ سانتی گرید باشد، کدام شهر بیشتر گرم است؟

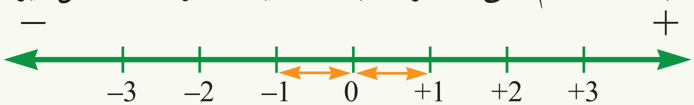
در دو عدد تام روی محور اعداد، همان عدد بزرگ‌تر است که به طرف راست قرار داشته باشد؛ **طور مثال:** عدد 3 طرف راست عدد 2 قرار دارد، لذا عدد 3 بزرگ‌تر از عدد 2 است، یا به عبارت دیگر عدد 2 کوچک‌تر از عدد 3 است و این طور می‌نویسیم:

$3 > 2$ یا $2 < 3$

به همین ترتیب (-1) به طرف راست (-3) قرار دارد، لذا عدد 1− بزرگ‌تر از عدد 3− است و یا به عبارت دیگر، عدد 3− کوچکتر از عدد 1− می‌باشد آن را این طور می‌نویسیم:

$-1 > -3$ یا $-3 < -1$

اعداد تام مثبت، اعداد تام منفی و صفر را قبلاً روی یک محور مانند شکل زیر نشان داده‌ایم:



اگر به محور بالا نظر اندازیم، دیده می‌شود که عدد 1+ و عدد 1− از مبدا (صفر) به فاصله‌های مساوی قرار دارند، یعنی هر دو عدد از مبدا (صفر) به اندازهٔ یک واحد دورتر واقع گردیده‌اند، این دو عدد را **متضاد (معکوس جمعی)** می‌نامند. به همین ترتیب 2+ و 2− یا 3+ و 3− و غیره با یکدیگر متضاداند.

پس هر عدد تام و متضاد آن در روی محور اعداد به فاصله‌های مساوی از صفر قرار داشته و دارای علامت‌های مختلف می باشند. این فاصله از مبدا را **قیمت مطلقه** نامیده‌اند.

مثلاً: 3+ و 3− از صفر به اندازهٔ 3 واحد دورتر واقع‌اند؛ پس 3 قیمت مطلقهٔ 3+ و 3− است.
قیمت مطلقهٔ یک عدد با قرار دادن عدد در بین دو خط عمودی (| |) نمایش داده می‌شود، یعنی:

$|-3|=3$, $|+3|=3$, $|0|=0$

فعالیت

– متضاد اعداد مقابل را بنویسید. $-6 , -12 , -20 , +13 , -15 , 8$

– قیمت مطلقهٔ اعداد مقابل را دریابید؟ $-8 , 3 , 5 , -11 , -1 , -14 , +17 , 19$

آموختیم که:

• هر عددی که صفر نباشد (مثبت یا منفی) قیمت مطلقهٔ آن عدد مثبت است؛ اما قیمت مطلقهٔ صفر مساوی به صفر است، یعنی: $|0| = 0$ می باشد.

• قیمت مطلقهٔ یک عدد و قیمت مطلقهٔ متضاد آن باهم مساوی اند؛ یعنی:

$|-7| = |+7| = 7$

تمرین

1– اعداد تام زیر را از چپ به راست ترتیب طوری ترتیب کنید که کوچک‌ترین عدد به طرف چپ باشد.

$+12$ -3 -8 $+6$ -5

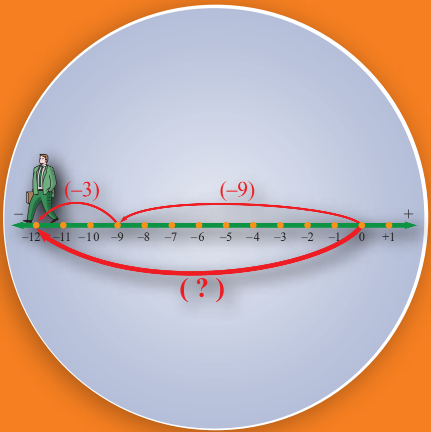
2– از دو عدد 6− و 9− کدام یک بزرگ‌تر است ؟ و از دو عدد 7− و صفر کدام یک کوچک‌تر است ؟

3– قیمت مطلقهٔ اعداد زیر را دریابید.

−7	3	−3	−5	+5
−12	+12	10	−10	+16
−200	a	+200	−132	+132

4– یک محور رسم کرده، عددهای 5− ، 2+ و 3− را روی آن مشخص نموده و متضاد هر یک از آن‌ها را نیز روی این محور نشان دهید.

جمع اعداد تام هم‌علامت



فرض کنید شخصی به روی محور اعداد به اندازۀ 9 واحد به طرف چپ و بعد از آن نیز به اندازۀ 3 واحد دیگر به طرف چپ رفته‌است، بگویید این شخص چند واحد را طی کرده است ؟

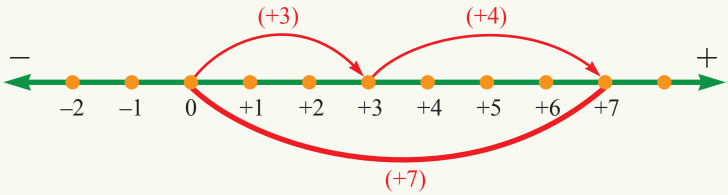
عملیۀ جمع را در اعداد طبیعی مورد مطالعه قرار داده اید؛ به طور مثال: $3+4=7$
در حقیقت هر عدد طبیعی، یک عدد تام مثبت است، بنابر این عملیۀ جمع بالا را می‌توانیم قرار زیر بنویسیم:

$$(+3)+(+4)=(+7)$$

یکی از روش های جمع کردن اعداد تام، استفاده از **محور اعداد** است.

جمع اعداد مثبت

برای نمایش $(+3)+(+4)$ در روی محور زیر دقت کنید.



در محور بالا دیده می‌شود که:

$$(+3)+(+4)=(+7)$$

یا

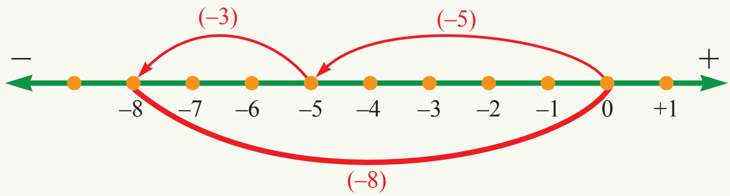
$$3+4=7$$

فعالیت

عدد $+5$ را با عدد $+2$ جمع نموده و در روی محور اعداد نشان دهید.

جمع اعداد منفی

هرگاه در روی محور اعداد از مبدأ به اندازهٔ 5 واحد به طرف چپ حرکت نماییم (-5) و سپس به اندازهٔ 3 واحد دیگر به طرف چپ حرکت کنیم (-3)؛ در حقیقت به طرف چپ، به نقطهٔ (-8) می‌رسیم. شکل زیر را مشاهده کنید.



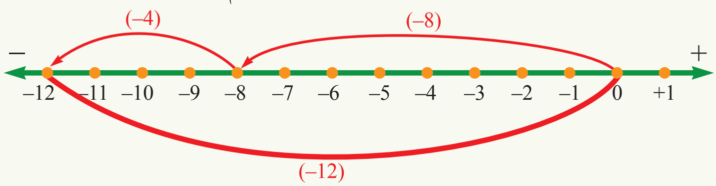
بنابرین:

$$(-5)+(-3)=(-8)$$

مثال

یک نفر به اندازهٔ 8 واحد به طرف چپ حرکت نموده و سپس به اندازهٔ 4 واحد دیگر باز هم به طرف چپ حرکت نموده است، نفر مذکور به کدام نقطه رسیده است ؟

حل:



$$(-8)+(-4)=-12$$

آموختیم که:

حاصل جمع دو عـدد هم‌علامت، برابر با مجموع قیمت مطلقهٔ آن دو عدد و علامت مشترک علامت حاصل جمع آن‌ها می باشد.

تمرین

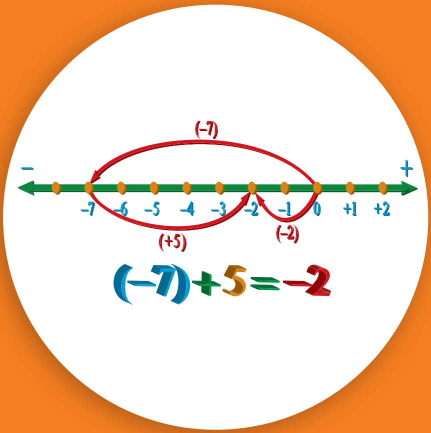
1- اعداد زیر را جمع کنید:

$(-12)+(-3)=$ $\quad$ $(-7)+(-6)=$ $\quad$ $37+47=$

2- زینب انگشت خود را در روی محور اعداد به اندازهٔ 3 واحد از مبدا محور(صفر) به طرف راست حرکت می‌دهد و سپس به اندازهٔ 4 واحد دیگر به طرف راست رفته و بالای یک نقطه انگشت می گذارد. انگشت زینب بالای کدام عدد تام قرار دارد؟

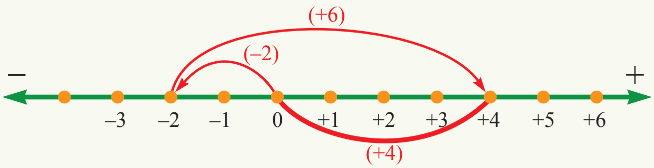
3- یک محور به صورت عمودی رسم نموده و یک مبدأ در روی آن تعیین نماییـد؛ بعد حرکت یک مورچه را بـه اندازهٔ 4 واحد از مبدأ به طرف پایین و سپس به اندازهٔ 6 واحد دیگر به طرف پایین محور تصور کرده و محل نهایی مورچه را روی محور نشان دهید.

جمع اعداد تام مختلف العلامت



احمد 7 افغانی از دکاندار قرض می گیرد،
(قرض را به علامت منفی نشان می‌دهیم).
بعد از چند روز او 5 افغانی به دکاندار
می‌پردازد.
اکنون احمد چند افغانی قرضدار است ؟

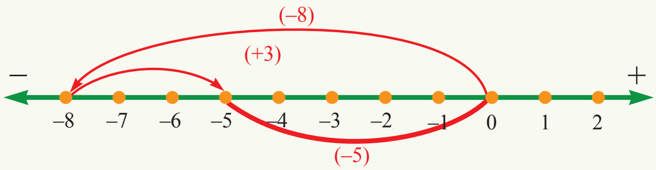
هرگاه در روی محور اعداد تام از مبدا، شروع به حرکت نموده و به اندازهٔ 2 واحد به طرف چپ و سپس از همان نقطه به اندازهٔ 6 واحد به طرف راست حرکت نماییم، در نهایت به نقطهٔ 4+ می‌رسیم. شکل زیر را مشاهده نمایید.



از روی شکل بالا دیده می‌شود که: $-2 + (+6) = (+4)$ یا $-2 + 6 = 4$

مثال اول: عدد (-8) و عدد $(+3)$ را باهم جمع می کنیم.

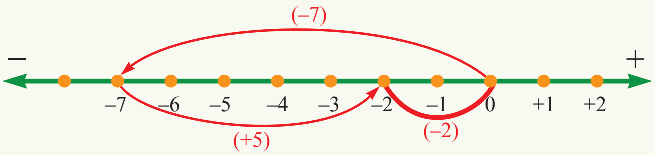
حل:



$(-8) + (+3) = -8 + 3 = -5$

مثال دوم: سؤالی که در شروع درس آمده است را با استفاده از محور اعداد حل می کنیم.

حل:

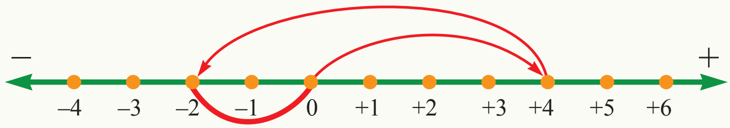


$(-7) + (+5) = -2$

سؤال: علامت (−) در عدد -2 چه چیز را نشان می‌دهد؟

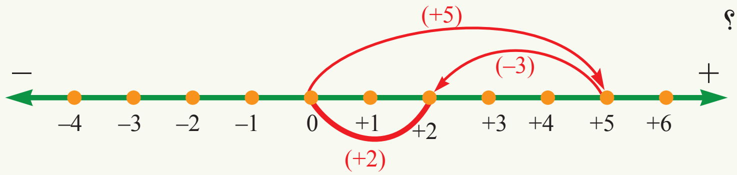
فعالیت

با استفاده از شکل زیر، یک سؤال بسازید و آن را حل نمایید:



مثال سوم: در یک روز زمستانی، درجهٔ حرارت کابل تا 5 درجه سانتی گرید بالای صفر می‌رسد. اگر در شب هوای کابل به اندازهٔ 3− درجه تغییرنماید، هوای کابل در شب چند درجه است؟

حل:



$$(+5)+(-3)=(+2)$$

پس هوای کابل در شب برابر با 2 درجه بالای صفر یعنی 2+ درجه است.

توجه: هوای کابل در روز 5+ درجه بالای صفر بوده و در هنگام شب که هوا سردتر می گردد، به اندازهٔ 3− درجه تغییر نموده و نظربه روز به اندازهٔ 3 درجه سردتر گردیده است.

آموختیم که: برای جمع کردن دو عدد تام با علامت‌های مختلف:

از عددی که قیمت مطلقهٔ بزرگ دارد، عددی را که دارای قیمت مطلقهٔ کوچک است، تفریق می کنیم و برای حاصل تفریق، علامت همان عددی را می گذاریم که قیمت مطلقهٔ آن بزرگ‌تر است.

تمرین

1− اعداد تام داده‌شده را با هم جمع کنید.

$(-3)+(+7)+(-4)+(-9)=$ ، $(+3)+(-5)=$ ، $(-6)+(+5)=$

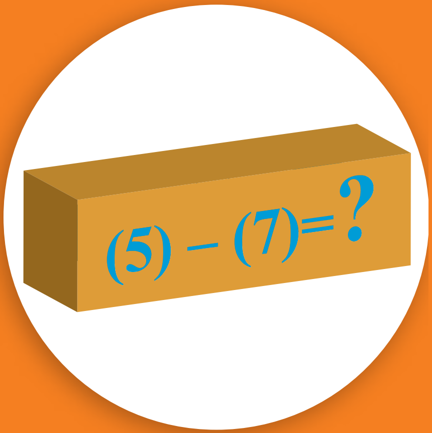
2− عدد تام (-4) را با عدد تام (-3) جمع نموده و در روی محور نشان دهید.

3− اگر درجه حرارت هرات 8 درجه سانتی گرید زیر صفر و بامیان از هرات 3 درجه سردتر باشد، درجه حرارت بامیان چند درجه است؟ در روی محور نشان دهید.

4− سه عدد تام (-6) ، $(+8)$ و (-10) را با هم جمع کنید.

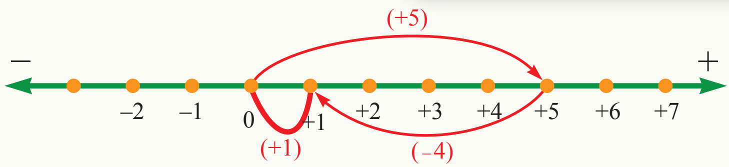
عملیهٔ تفریق عددهای تام

چگونه می توانیم عدد 7 را از عدد 5 تفریق نماییم؟



در درس‌های قبلی دیدیم که محور اعداد به ما کمک کرد تا جمع اعداد تام را بهتر درک نماییم.
در اینجا با استفاده از محور می توانیم تفریق دو عدد تام را بررسی کنیم.

فعالیت



- با توجه به شکل توضیح دهید که چگونه حاصل $4-5$ را پیدا می کنیم؟
- با همین روش $5-4$ را روی محور نشان دهید و حاصل آن را پیدا کنید.
- روی یک محور $(-5)+4$ را نمایش دهید و حاصل آن را پیدا کنید.
- $5-4$ و $(-5)+4$ را با هم مقایسه کنید و از آن چه نتیجه به دست می آید؟

نتیجهٔ فعالیت بالا به ما نشان می‌دهد برای این که عدد 5 را از عدد 4 تفریق نماییم، باید عدد -5 را با عدد 4 جمع کنیم یا به عبارت دیگر، می‌توانیم عمل تفریق را به عمل جمع تبدیل نماییم؛ یعنی:

$$4-5=(+4)+(-5)=-1$$

دیده می‌شود که در عملیهٔ تفریق، علامت مفروق تغییر می کند؛ یعنی در حقیقت در عملیهٔ تفریق، متضاد (معکوس جمعی)(Additive inverse)مفروق را با مفروق منه جمع می کنیم.

مثال اول: عدد -5 را از عدد 7 تفریق نمایید.
حل: متضاد مفروق؛ یعنی متضاد عدد -5 را که عدد $+5$ است، با مفروق منه (7)جمع می کنیم.

$$7 - (-5) = 7 + (+5) = 7+5 = 12$$

مثال دوم: عدد 9 را از عدد -3 تفریق نمایید.
در این جا عدد 9 مفروق است، لذا متضاد آن را که -9 است، با عدد مفروق منه یعنی -3 جمع می‌نماییم:

$$(-3) - (+9) = (-3) + (-9) = -12$$

مثال سوم: عدد -4 و عدد -2 را باهم جمع نموده و عدد -9 را از حاصل جمع آن‌ها تفریق نمایید.
حل: اولاً اعداد -4 و -2 را با هم جمع نموده و سپس علامت مفروق یعنی -9 را به $+9$ تغییرمی‌دهیم و در اخیر، مفروق منه و مفروق را باهم جمع می کنیم، یعنی:

$$(-4) + (-2) = -6 \quad , \qquad (-6) - (-9) = -6 + 9 = +3 = 3$$

آموختیم که:
برای تفریق نمودن دو عدد تام، علامت مفروق را تغییر داده و سپس عملیهٔ جمع را انجام می‌دهیم. یا به عبارت دیگر: متضاد مفروق را با مفروق منه جمع می کنیم.

تمرین

1- عملیه‌های زیر را انجام دهید.

$0 - 5$	$(-8) - (-4)$	$(-3) - (-9)$	$(-3) - (9)$	$(-12) - (-20)$
$5 - 0$	$-20 - 12$	$8 - 12$	$-13 - (-3)$	$(-25) - (-12)$

2- می خواهیم از عدد تام 6 که مفروق منه است، عدد تام 4 را تفریق نماییم، این عملیه را به روی محور اعداد نشان دهید؟

3- حاصل جمع اعداد تام -6 و $+8$ را به دست آورده و عدد -14 را از آن تفریق نمایید.

ضرب اعداد تام مختلف‌العلامت

اگر دو عدد تام مختلف‌العلامت در هم ضرب گردند، علامت حاصل ضرب چیست؟

$$3 \times (-4) = -12$$
$$(-3) \times 4 = -12$$

فعالیت

اگر در حاصل ضرب از یک عامل ضربی آن یک یک واحد کم گردد، در حاصل ضرب چه تغییری به وجود خواهد آمد؟
به ضرب‌های مقابل توجه کنید:

$3\times2=6$	$4\times4=16$
$2\times2=4$	$3\times4=12$
$1\times2=2$	$2\times4=8$
$0\times2=0$	$1\times4=4$
$-1\times2=-2$	$0\times4=0$
$-2\times2=-4$	$-1\times4=-4$
$-3\times2=-6$	$-2\times4=-8$
$-4\times2=-8$	$-3\times4=-12$
⋮	⋮

از حاصل ضرب‌های بالا، تغییر به وجود آمده را پیدا کنید.
– علامت حاصل ضرب دو عدد مثبت چیست؟
– علامت حاصل ضرب عدد منفی در عدد مثبت چیست؟

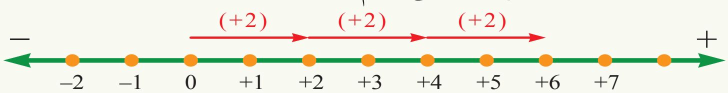
به طریق زیر نیز می‌توانیم عین نتیجه را به دست آوریم:
هر گاه یک عدد تام مثبت به طور مثال $+2$ را سه دفعه با هم جمع نماییم در این صورت دیده می‌شود که:

$$(+2)+(+2)+(+2)=+6$$

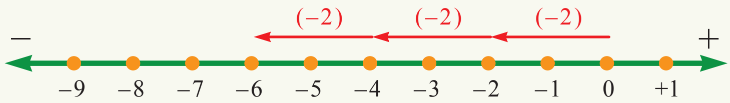
در اینجا در حقیقت عدد $+2$ سه چند شده است، و در اعداد طبیعی داشتیم که:

$$3\times2=6$$

عملیهٔ بالا را روی محور اعداد چنین نشان می‌دهیم:



به همین ترتیب در شکل زیر دیده می‌شود که عدد -2 سه دفعه وجود دارد:



$$(-2)+(-2)+(-2)=3\times(-2)=-6$$

مثال: عدد -4 را در 3 ضرب نمایید.

حل: $3\times(-4)=(-4)+(-4)+(-4)=-12$

سؤال: خانه‌های خالی زیر را پر کنید:

$(-3)\times(\quad)=-3$ $\qquad (\quad)\times 5=-25$ $\qquad (-6)\times 2=(\quad)$

فعالیت

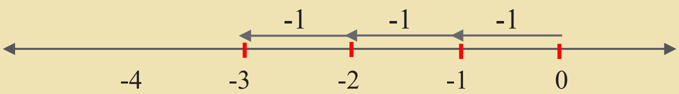
حاصل ضرب اعداد از 7 تا به -7 را با عدد 2 مانند فعالیت اول این درس بنویسید.

آموختیم که:

- هرگاه دو عدد مثبت در هم ضرب گردند، حاصل ضرب آن‌ها دارای علامت مثبت است.
- هرگاه یک عدد منفی در یک عدد مثبت یا عدد مثبت در یک عدد منفی ضرب گردد، حاصل ضرب آن‌ها دارای علامت منفی است.

تمرین

1- در روی محور زیر چه می‌بینید؟ به صورت ضرب بنویسید.



2- اعداد تام $+5$ تا -5 را به ترتیب در 2 ضرب نموده و حاصل ضرب‌ها را دو به دو مقایسه کنید.

3- اگر حاصل ضرب دو عدد تام برابر با $+8$ باشد و اگر یکی از اعداد مساوی به $+4$ باشد، دیگرش چند است؟

4- اگر حاصل ضرب دو عدد تام برابر با -8 باشد و اگر یکی از اعداد مساوی به -4 باشد، دیگرش چند است؟

5- ضرب‌های زیر را انجام دهید:

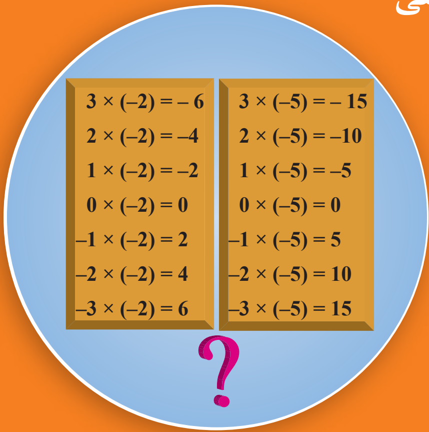
$(-5)\times 3=$ $\qquad (-4)\times 5=$ $\qquad 4\times 7=$

$(-1)\times(+1)=$ $\qquad (-3)\times(+1)=$ $\qquad (-2)\times(+3)=$

$(-9)\times(100)=$ $\qquad (-7)\times(+10)=$ $\qquad (-1)\times 0=$

6- کدام عدد با $(+7)$ ضرب گردد، تا حاصل ضرب آن‌ها (-56) شود؟

ضرب عدد تام منفی در عدد تام منفی



هرگاه یک عدد تام منفی طور مثال (عدد تام -2 یا عدد تام -5) را به دیگر اعداد تام (مثبت، صفر و منفی) به ترتیب متوالی ضرب نماییم، از مقایسهٔ حاصل ضرب -2 و -5 چه نتیجهٔ به دست خواهیم آورد؟ بر علاوه علامت حاصل ضرب دو عدد منفی چی خواهد بود؟

فعالیت

با کم شدن اولین عامل ضربی، چه تغییری در حاصل ضرب مشاهده می‌کنید؟ با توجه به این تغییر حاصل ضرب های زیر را تکمیل کنید:

⋮	⋮
$5 \times (-2) = -10$	$5 \times (-5) = -25$
$4 \times (-2) = -8$	$4 \times (-5) = -20$
$3 \times (-2) = -6$	$3 \times (-5) = -15$
$2 \times (-2) = -4$	$2 \times (-5) = -10$
$1 \times (-2) = -2$	$1 \times (-5) = -5$
$0 \times (-2) = 0$	$0 \times (-5) = 0$
$-1 \times (-2) = +2$	$-1 \times (-5) = +5$
$-2 \times (-2) = +4$	$-2 \times (-5) = +10$
$-3 \times (-2) = +6$	$-3 \times (-5) = +15$
$-4 \times (-2) =$	$-4 \times (-5) =$
$-5 \times (-2) =$	$-5 \times (-5) =$
⋮	⋮

در فعالیت شروع این درس مشاهده شد که:
هرگاه یک عدد منفی به یک عدد منفی دیگر ضرب گردد؛ مانند: $[(-4) \times (-5)]$ نتیجهٔ آن یک عدد مثبت می‌شود.

مثال اول: عدد -6 را به عدد -2 ضرب نمایید.

حل: همان طوری که در فعالیت شروع درس مشاهده کردیم، از ضرب این دو عدد، نتیجهٔ زیر به دست می‌آید.

$(-6) \times (-2) = +12$

مثال دوم: حاصل ضرب $(-10) \times (+3) \times (-2)$ را به دست آورید.

حل:اول دو عدد را از طرف چپ با هم ضرب و سپس حاصل آن‌ها را با عدد سومی ضرب می کنیم:

$(-2) \times (+3) = -6$

اکنون حاصل به دست آمده را در عدد بعدی (-10) ضرب می کنیم، بنابراین داریم:

$(-6) \times (-10) = +60$

آموختیم که:

1- حاصل ضرب یک عدد مثبت در یک عدد منفی، یک عدد منفی است.

2- حاصل ضرب دو عدد منفی، یک عدد مثبت است.

3- به صورت عموم حاصل ضرب دو عدد هم‌علامت، یک عدد مثبت و حاصل ضرب دو عدد مختلف‌العلامت یک عدد منفی است.

تمرین

1- ضرب‌های زیر را انجام دهید.

$(-1) \times (-1) =$ $\qquad$ $(+3) \times (-3) =$ $\qquad$ $(-6) \times (-1) =$

$(-4) \times (-8) =$ $\qquad$ $(-2) \times (+5) =$ $\qquad$ $(-12) \times (-3) =$

2- از عدد $+2$ تا به عدد -6 را به ترتیب در عدد -3 ضرب نموده و حاصل ضرب را دو به دو با هم مقایسه نمایید.

3- جاهای خالی را با اعداد مناسب پر کنید.

$(-3) \times (\quad) = +21$ $\qquad$ $(-2) \times (-5) = (\quad)$ $\qquad$ $(-4) \times (\quad) = +8$

$(-1) \times (-11) = (\quad)$ $\qquad$ $(-3) \times (\quad) = -6$ $\qquad$ $(\quad) \times (-9) = +27$

4- حاصل ضرب‌های زیر را به دست آورید.

$(-3) \times (+2) \times (-5) =$ $\qquad$ $(-2) \times (+3) \times (-4) =$

$(-6) \times (-4) \times (-2) =$ $\qquad$ $(+7) \times (-4) \times (-2) =$

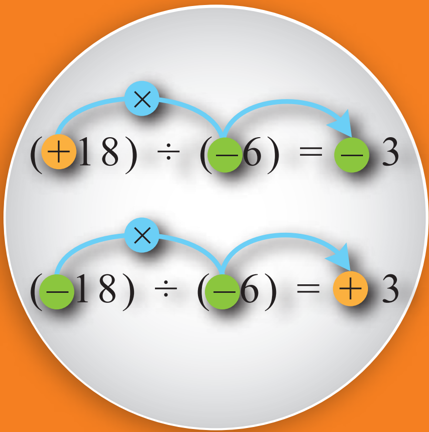
$(-10) \times (-2) \times (+1) =$ $\qquad$ $(-1) \times (-1) \times (-1) =$

تقسیم عددهای تام

$(+18) \div (-6) = ?$

$(-18) \div (-6) = ?$

$? \times (+6) = -18$



همان طوری که از مبحث اعداد طبیعی می‌دانیم، عملیهٔ تقسیم با عملیهٔ ضرب رابطه دارد؛ یعنی: هر گاه یک حاصل ضرب بر جزء اول ضربی تقسیم گردد، جزء دوم ضربی به دست می‌آید؛ به همین ترتیب، اگر حاصل ضرب بر جزء دوم ضربی تقسیم گردد، جزء اول ضربی به دست می‌آید. جدول زیر را مشاهده کنید:

عملیهٔ تقسیم	عملیهٔ ضرب
$(+18) \div (+6) = +3$	$(+6) \times (+3) = +18$
$(+18) \div (-6) = -3$	$(-6) \times (-3) = +18$
$(-18) \div (+6) = -3$	$(+6) \times (-3) = -18$
$(-18) \div (-6) = +3$	$(-6) \times (+3) = -18$

فعالیت

از عملیه‌های ضرب زیر، یک جدول مانند جدول بالا طوری ترتیب کنید که رابطهٔ بین ضرب و تقسیم اعداد تام را نشان دهد:

1) $6 \times 2 = 12$
2) $(-6) \times 2 = -12$
3) $6 \times (-2) = -12$
4) $(-6) \times (-2) = 12$

- توضیح دهید چگونه دو عدد تام را بر همدیگر تقسیم می کنیم؟

نتیجه: با توجه به ضرب و تقسیم‌های انجام شده دیدیم که:
علامت خارج قسمت یک عدد منفی بر یک عدد مثبت، منفی است.
علامت خارج قسمت یک عدد منفی بر یک عدد منفی، مثبت است.
علامت خارج قسمت یک عدد مثبت بر یک عدد منفی، منفی است.

مثال: اول علامت‌های صورت و مخرج را تعیین کنید؛ سپس خارج قسمت‌ها را به دست آرید:

حل:

$$\frac{(+5)\times(-8)}{(-10)\times(+1)}= \quad , \quad \frac{(+6)\times(-5)}{(+2)\times(-15)}= \quad , \quad \frac{(-4)\times(-3)}{(-2)\times(-1)}=$$

در عملیهٔ تقسیم عددهای تام نیز مانند عملیهٔ ضرب ، ابتدأ علامت حاصل تقسیم را تعیین نموده؛ سپس عمل تقسیم را انجام می‌دهیم.

$$\frac{(+5)\times(-8)}{(-10)\times(+1)}=\frac{(-40)}{(-10)}=+4 \; , \; \frac{(+6)\times(-5)}{(+2)\times(-15)}=\frac{(-30)}{(-30)}=+1 \; , \; \frac{(-4)\times(-3)}{(-2)\times(-1)}=\frac{(+12)}{(+2)}=+6$$

به یاد داشته باشید که:

در عملیهٔ تقسیم ابتداء علامت حاصل تقسیم را تعیین و سپس قیمت مطلقهٔ مقسوم را بر قیمت مطلقهٔ مقسوم علیه تقسیم می کنیم.

تمرین

1– ابتدا تساوی سمت چپ را تکمیل کنید و سپس حاصل تقسیم سمت راست را بنویسید:

$(20)\div(-5)=$ $(-5)\times(\quad)=+20$

$(-56)\div(+7)=$ $(+7)\times(\quad)=-56$

$(-40)\div(+8)=$ $(\quad)\times(+8)=-40$

$(-35)\div(-5)=$ $(\quad)\times(-5)=-35$

2– برای تقسیم کردن حاصل افادهٔ $(-18)-(+6)$ بر حاصل افادهٔ $(-4)+(-8)$ چگونه باید عمل کرد؟

3– عملیه‌های زیر را تکمیل و جدول مربوطهٔ عملیهٔ ضرب و تقسیم را تشکیل دهید.

$(-42)\div(+6)=(\quad)$ $(-8)\times(+4)=(\quad)$

$(\quad)\times(-2)=-72$ $(+50)\times(\quad)=-200$

$(-100)\div(\quad)=+100$ $(\quad)\div(-4)=+20$

$(+60)\div(\quad)=(-20)$ $(-12)\times(+3)=(\quad)$

دریافت قیمت های افاده های حسابی

اگر عملیه های چهارگانه (جمع، تفریق، ضرب و تقسیم) در یک سؤال داده شده باشند، چه باید کرد؟
آیا سؤال زیر را با استفاده از عملیه های اساسی چهارگانه که تا به حال آموخته اید، حل کرده می توانید؟

$$(5)-\{(-4)\times(-7)\}-\{(-6)\div(+2)\}=?$$

$$-3[2-(4-3)-\{-1+1-(-1-1)\}]$$
$$-3[2-4+3-\{-1+1+1+1\}]$$
$$-3[2-4+3+1-1-1-1]$$
$$-3[-1]=3$$

به یاد داشته باشید که:

علامت (   ) را **قوس کوچک**، علامت {   } را **قوس متوسط** و علامت [   ] را قوس کلان می نامند.

برای رفع قوس ها، اول قوس کوچک، بعد قوس متوسط و سپس قوس کلان را رفع می نماییم.

برای محاسبه یا ساده ساختن افادۀ حسابی مراحل زیر را به کار می‌بریم:

اول: اگر در افاده‌های حسابی طاقت و جذر وجود داشته باشد، نخست آن را ساده می‌سازیم.
دوم: در صورتی که در افاده‌های حسابی، قوس‌ها وجود داشته باشد، اول قوس را رفع می‌نماییم.
سوم: عملیه‌های ضرب و تقسیم را از طرف چپ به راست انجام می‌دهیم.
چهارم: عملیه‌های جمع و تفریق را از چپ به راست انجام می‌دهیم.

مثال: افادۀ زیر را که یک افادۀ حسابی است، محاسبه نمایید:

$$(-6\times4)\times2^3-5+\sqrt{49}\div7-10$$

حل

اول : $(-6\times4)\times8-5+7\div7-10$
دوم : $-24\times8-5+7\div7-10$
سوم : $-192-5+7\div7-10$
چهارم : $-192-5+1-10$
پنجم : $-197+1-10$
ششم : $-196-10$
هفتم : -206

خواص عملیه‌ها:

فعالیت

عملیه‌های زیر را انجام دهید.

1) $-7+18=$ $\qquad$ $18+(-7)=$

2) $-3+(-7+2)=$ $\qquad$ $\{(-3)+(-7)\}+2=$

3) $2\times(-3)=$ $\qquad$ $\{(-4)\times5\}\times7=$

4) $(-4)\times(5\times7)=$ $\qquad$ $\{(-4\times7)\}+\{(-4)\times9\}=$

5) $(-4)\times(7+9)=$

6) آیا خاصیت تبدیلی در عملیه‌های ضرب و جمع، مانند اعداد طبیعی، در اعداد تام نیز صدق می کند؟

7) آیا خاصیت اتحادی عملیه‌های ضرب و جمع، مانند اعداد طبیعی، در اعداد تام نیز وجود دارد؟

8) آیا عملیهٔ تفریق اعداد تام دارای خاصیت تبدیلی است یا خیر؟ با مثال نشان دهید.

آموختیم که:

در عملیه‌های جمع و ضرب اعداد تام مانند اعداد طبیعی، خاصیت‌های تبدیلی و اتحادی صدق می کنند.

تمرین

افاده‌های زیر را ساده بسازید.

1) $\{(-6\times4)\times2\}-\{5\times(-5+3)\}+20$

2) $[9\div\{-(-3)\times(5-8)\}]+10$

3) $10\times24\div\{-(-4)\times(5-7)\}-6$

4) $[\{5\times(-4)\}-\{(-5)\times(-1)\}]-10$

5) $2\times\{(-3)+(-2)\}+8-2$

خلاصهٔ فصل

- اعداد $\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, \ldots$ را به نام اعداد تام یاد می‌کنند.
- ست اعداد تام را قرار زیر نشان می‌دهند.

$$\mathbf{I} = \{\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, \ldots\}$$

- محور اعداد عبارت از خط جهت داری است که در روی آن می‌توانیم اعداد مثبت، اعداد منفی وصفر را نشان دهیم.
- هر عدد تام و **متضاد** آن در روی محور اعداد، به فاصله‌های مساوی از صفر قرار دارند و دارای علامت‌های مختلف می‌باشند و فاصله آن‌هارا از مبدا **قیمت مطلقه** می‌نامند.
- در اعداد مثبت به نوشتن علامت ضرورت نیست.
- برای تفریق نمودن دو عدد تام، اول علامت مفروق را تغییر داده و سپس عملیهٔ جمع را انجام می‌دهیم. یا به عبارت دیگر: متضاد مفروق را با مفروق منه جمع می کنیم.
- حاصل ضرب دو عدد هم‌علامت مثبت می‌باشد.
- حاصل ضرب دو عدد مختلف‌العلامت منفی می‌باشد.
- در عملیهٔ تقسیم ابتدا علامت حاصل تقسیم را تعیین و سپس قیمت مطلقهٔ مقسوم را به قیمت مطلقهٔ مقسوم علیه تقسیم می کنیم.
- علامت (   ) را به نام **قوس کوچک**، علامت {   } را به نام **قوس متوسط** و علامت [   ] را به نام **قوس بزرگ** یاد می کنند.

برای رفع قوس‌ها، اول قوس کوچک، بعد قوس متوسط و سپس قوس کلان رفع می‌گردد. هرگاه علامت منفی خارج قوس قرار داشته باشد، علامت‌های داخل قوس تغییر می‌یابند و اگر علامت خارج قوس مثبت باشد، علامت‌های داخل قوس تغییر نمی‌کنند.

- خاصیت‌های اتحادی و تبدیلی عملیه‌های جمع و ضرب، مانند اعداد طبیعی، در اعداد تام نیز صدق می‌کنند.

تمرین فصل سوم

1- اعداد تام -3، $+7$، -4، 6 و $+10$ و متضاد آن‌ها را روی محور اعداد نشان دهید.

2- قیمت‌های مطلقهٔ اعداد -8، $+8$، -10، 0 و -12 را بنویسید.

3- تساوی‌های زیر را تکمیل نمایید:

a) $(-6)+4=$, b) $5-(-3)=$

c) $8+0=$, d) $(-8)+0=$

4- حاصل جمع سه عدد تام (-4)، $(+2)$ و (-1) را روی یک محور نشان دهید.

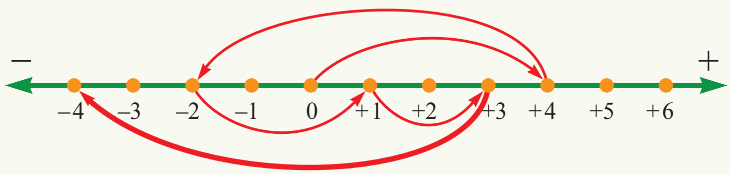
5- خانه‌های خالی زیر را پُر کنید:

a) $(+20)+(13)=+13+(\quad)$

b) $(-8+3+0)-(-5+0)=(-5)+(\quad)$

c) $+4-(-2)+(3-7)=(-20)+(\quad)$

6- حرکت روی محور اعداد توسط تیر قرار شکل زیر نشان داده شده است؛ این اعداد را جمع نموده و نتیجه را حاصل نمایید.



7- درجهٔ حرارت کابل 30 درجهٔ سانتی گرید بالای صفر است و هوای شهر بغلان 7 درجه از کابل سردتر است. درجه حرارت بغلان را به دست آورید.

8- هوای قلات 5 درجهٔ سانتی گرید زیر صفر است و هوای هرات 7 درجهٔ سانتی گرید از قلات گرمتر می‌باشد، هوای هرات چند درجهٔ سانتی گرید است؟

9- از افادهٔ $+10-(-7)$ افادهٔ $-(-6+10-4)$ را تفریق کنید.

10- حاصل ضرب‌های زیر را به دست آورید:

a) $(-8+2-4)\times(-5+2-1)=$

b) $-(-4+6-3)\times(-5+0)=$

c) $(6-10)\times(-7+3\times2)=$

11- اگر یک عدد منفی تقسیم یک عدد منفی دیگر گردد، حاصل تقسیم دارای کدام یک از علامت‌های زیر است؟

الف) مثبت ب) منفی ج) هم مثبت و هم منفی د) هیچکدام

12- حاصل تقسیم‌های زیر را به دست آورید:

a) $-(-10) \div (-2) =$

b) $(-16 + 4) \div (-2) \times (3) =$

c) $-(+10 + 8) \div (-6 \div 2) =$

13- افادۀ زیر را ساده سازید:

$$(-6) \div (-2) - [(10) \div \{(-2) + (+2^2 \times 3)\}] - 2 =$$

14- افادۀ زیر را ساده سازید:

$$(-2) \times 2^3 + (-5 + 3) + 20 - 18 \div \{-(-3) \times (5 - 8)\} =$$

فصل چهارم

اعداد نسبتی



این پرنده $\frac{53}{500}kg$ وزن دارد.

وزن این پرنده با یک عدد نسبتی نشان داده شده است.

اعداد نسبتی

آیا فکر کرده اید چگونه می توان دو سیب را به صورت مساوی بین سه نفر تقسیم کرد؟

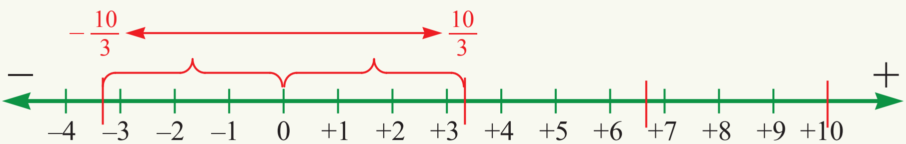


فعالیت

1- یک تار را به طول 10cm در نظر بگیرید.
2- تار را به سه قسمت مساوی تقسیم کنید.
3- به کمک خط‌کش درجه‌دار هر سه قسمت را اندازه بگیرید.

در فعالیت بالا مشخص می‌شود که طول هر قسمت از 3سانتی متر بزرگ‌تر و از 4 سانتی متر کوچک‌تر است بنابراین نمی‌توان آن را به صورت یک عدد تام نشان داد، لذا به ست اعداد دیگری نیاز است تا به کمک آن بتوان عدد بالا را نشان داد. در این فعالیت، چون که 10 بر 3 حصهٔ مساوی تقسیم شده است، می‌توانیم آن را بـه شکل $\frac{10}{3}$ نشان دهیم که این نوع اعـداد را بـه نام **اعداد نسبتی** یاد می‌کنند.

حالا می‌خواهیم به کمک محور اعداد، عدد نسبتی $\frac{10}{3}$ را نشان دهیم.

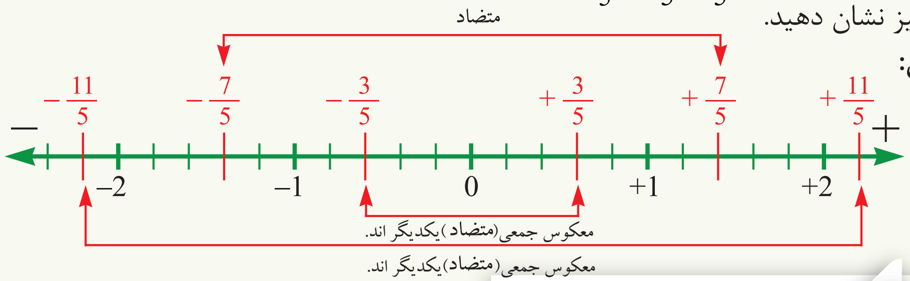


همان طوری که هر عدد تام، دارای عدد متضاد(معکوس جمعی) است، عدد نسبتی نیز دارای عدد متضاد می‌باشد.

طور مثال متضاد $\frac{10}{3}$ عدد $-\frac{10}{3}$ است که در شکل بالا نشان داده شده است.

مثال: اعداد نسبتی $\frac{3}{5}$ ، $\frac{7}{5}$ و $-\frac{11}{5}$ را روی محور اعداد مشخص نموده و متضاد آن‌ها را نیز نشان دهید.

حل:



فعالیت

1- ابتدا سه واحد را روی محور اعداد جدا کنید.

2- این سه واحد را به چهار قسمت مساوی تقسیم نمایید.

3- هر قسمت نشان‌دهندهٔ کدام عدد نسبتی است؟

4- یک واحد را به چهار قسمت مساوی تقسیم کنید و $\frac{3}{4}$ را روی آن نشان دهید.

5- متضاد این عدد کدام است؟ روی محور نشان دهید.

اگر کسر $\frac{3}{4}$ را روی محور نشان دهیم و نتیجهٔ فعالیت بالا را با آن مقایسه نماییم، دیده می‌شود که عدد نسبتی $\frac{3}{4}$ با کسر $\frac{3}{4}$ یکی می‌باشد، بنابر این:

یک عدد نسبتی عبارت از عددی است که به شکل $\frac{n}{d}$ نشان داده می‌شود، عددهای n و d اعداد تام بوده و $d \neq 0$ می‌باشد.

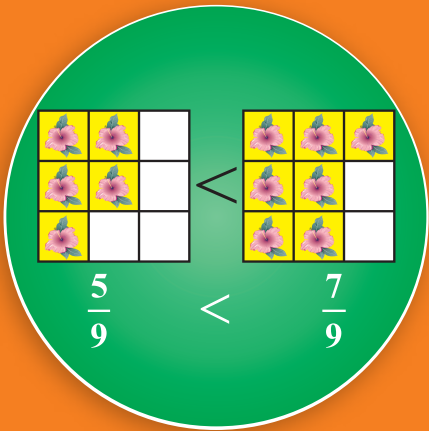
تمرین

1- در یک محور اعداد هر واحد را به 3 حصهٔ مساوی تقسیم نموده و اعداد نسبتی $\frac{2}{3}$ ، $\frac{5}{3}$ و $-\frac{7}{3}$ را روی محور نشان داده و اعداد متضاد آن‌ها را پیدا کنید.

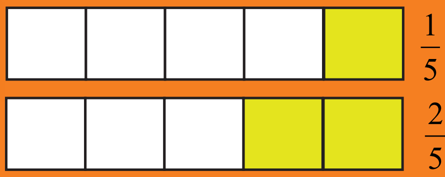
2- هر واحد را روی محور به 4 حصهٔ مساوی تقسیم کنید و هر حصه را a بنامید؛ سپس عدد نسبتی $\frac{5}{4}$ و متضاد آن را روی محور نشان داده و در ضمن بگویید که عدد $\frac{3}{4}$ چند a از عدد $-\frac{5}{4}$ دور است.

3- یک محور را طوری تقسیم‌بندی کنید که اعداد نسبتی $\frac{3}{5}$ ، $-\frac{4}{5}$ ، $\frac{7}{5}$ و $\frac{-6}{5}$ به شکل واضح روی محور نشان داده شده باشد.

مقایسهٔ اعداد نسبتی



در کدام تصویر، ساحهٔ بیشتری با گل پوشیده شده است؟



آیا می‌توانید بگویید که در اعداد نسبتی فوق کدام عدد بزرگتر می‌باشد؟

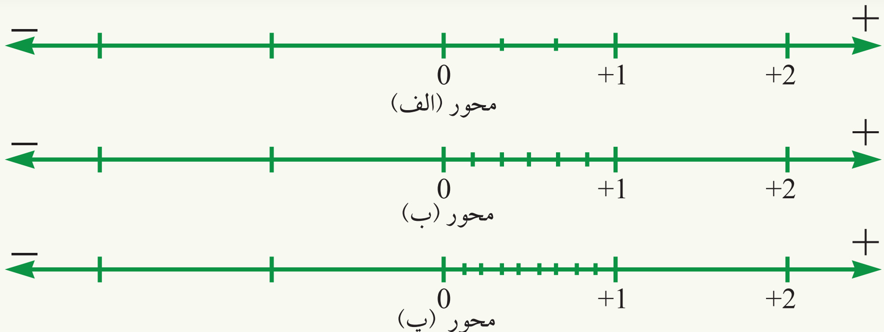
فعالیت

1- عدد نسبتی $\frac{1}{3}$ را روی محور (الف) نشان دهید.

2- عدد $\frac{2}{6}$ را روی محور (ب) نشان دهید.

3- عدد $\frac{3}{9}$ را روی محور (پ) نشان دهید.

4- از مقایسهٔ 3 عدد بالا روی محورهای زیر چه نتیجه‌یی به دست می‌آید؟



طوری که ملاحظه می‌شود در فعالیت فوق، اعداد نسبتی $\frac{1}{3}$ ، $\frac{2}{6}$ و $\frac{3}{9}$ دارای عین قیمت می‌باشند و یا هر سه کسر عام با هم معادل اند.

فعالیت

1- روی محور اعداد، عدد نسبتی $\frac{3}{4}$ را نشان دهید.

2- عدد نسبتی $\frac{5}{4}$ را روی همین محور نیز نشان دهید.

3- عدد نسبتی $\frac{5}{4}$ بزرگتر است یا $\frac{3}{4}$ ؟

4- در مقایسهٔ اعداد فوق، بگویید کدام عدد روی محور در سمت راست عدد دیگر واقع است؟

از فعالیت فوق این نتیجه به دست می‌آید که در محور اعداد، عدد نسبتی‌یی که به طرف راست عدد واقع باشد، از عددی که به طرف چپ واقع است بزرگتر می‌باشد، چنانچه در اعداد تام نیز مشاهده کرده‌اید.

مثال اول: اعداد نسبتی $\frac{3}{4}$ و $\frac{3}{5}$ را با هم مقایسه کنید و بگویید که کدام عدد بزرگتر است؟

حل: چون صورت‌ها با هم مساوی اند (3=3) کسری که مخرج آن بزرگ‌تر است کوچک‌تر می‌باشد در نتیجه $\frac{3}{5} > \frac{3}{4}$ می‌باشد.

حالا دو عدد نسبتی که مخرج‌ها و صورت‌هایشان با هم مساوی نیستند؛ مانند: $\frac{3}{5}$ و $\frac{4}{7}$ را درنظر می گیریم.

برای مقایسهٔ این چنین اعداد، ابتدا آن‌ها را هم مخرج می کنیم، یعنی:

$$\frac{3}{5}\times\frac{7}{7}=\frac{21}{35} \quad , \quad \frac{4}{7}\times\frac{5}{5}=\frac{20}{35}$$

دیده می‌شود که: $\frac{20}{35} > \frac{21}{35}$ است، بنابر این: $\frac{4}{7} > \frac{3}{5}$ می‌باشد.

مثال دوم: از دو عدد نسبتی $\frac{4}{9}$ و $\frac{7}{12}$ ، کدام یک بزرگ‌تر است؟

حل:

$$\frac{4}{9}\times\left(\frac{12}{12}\right)=\frac{48}{108} \quad , \quad \frac{7}{12}\times\left(\frac{9}{9}\right)=\frac{63}{108}$$

بنابر این می توانیم بنویسیم که: $\frac{48}{108} > \frac{63}{108}$ و از اینجا می‌توانیم نتیجه بگیریم که: $\frac{4}{9} > \frac{7}{12}$

در مقایسهٔ اعداد نسبتی یی که مخرج‌هایشان باهم مساوی باشند عددی که صورت آن بزرگ است بزرگ‌تر می‌باشد و اگر صورت‌های شان با هم مساوی باشند، عددی که مخرج آن بزرگ‌تر است. کوچک‌تر می‌باشد و اما اگر، نه صورت‌ها و نه مخرج‌های شان باهم مساوی باشند در این صورت اعداد نسبتی را هم مخرج می‌سازیم. یا به عبارت دیگر کوچک‌ترین مضرب مشترک را در می‌یابیم و بعد با هم مقایسه می کنیم.

تمرین

اعداد نسبتی زیر را باهم مقایسه کنید.

a) $\frac{3}{5}, \frac{4}{7}$ b) $\frac{5}{7}, \frac{-6}{11}$ c) $\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}$ d) $\frac{-8}{5}, \frac{-11}{7}$ e) $\frac{5}{9}, \frac{3}{7}, \frac{1}{3}$

عملیه‌های جمع و تفریق اعداد نسبتی



برای ساختن یک چادر، $5\frac{1}{3}$ متر تکه لازم است، و برای ساختن یک دستمال گردن به $2\frac{2}{5}$ متر دیگر از همان تکه ضرورت می‌باشد. اگر تمام تکهٔ مورد نیاز از تکه‌یی که طول آن $15\frac{1}{2}$ متر است، قطع گردد، چقدر تکهٔ دیگر باقی می‌ماند؟

فعالیت

1- ابتدا $-\frac{1}{2}$ را روی محور اعداد نشان دهید و آن را نقطهٔ A بنامید.

2- از نقطهٔ A به اندازهٔ $\frac{13}{10}$ به سمت راست حرکت کنید و آن را B بنامید.

3- نقطهٔ B معادل کدام عدد نسبتی است؟

4- با استفاده از مخرج مشترک، حاصل جمع $-\frac{1}{2}+\frac{13}{10}$ را پیدا کنید.

5- حاصل جمع $\frac{2}{6}+\frac{3}{6}$ و حاصل تفریق $\frac{5}{6}-\frac{4}{6}$ را دریابید.

مثال اول: اعداد نسبتی زیر را از طریق یافتن مخرج مشترک و یا کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج‌ها، جمع کنید:

حل:

$$\frac{5}{18}+\frac{7}{12}=\frac{60+126}{216}=\frac{186}{216}=\frac{93}{108}=\frac{31}{36}$$

حالا اگر در این مثال کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج‌ها را پیدا کنیم، می‌توانیم عملیهٔ جمع را به قرار زیر انجام دهیم:

$$18=2\times3\times3=2\times3^2$$

$$12=3\times2\times2=3\times2^2$$

دیده می‌شود که کوچک‌ترین مضرب مشترک 18 و 12 عبارت از $3^2\times2^2=36$ است، لذا داریم که:

$$\frac{5}{18}+\frac{7}{12}=\frac{10+21}{36}=\frac{31}{36}$$

فعالیت

1- ابتدا عدد نسبتی $\frac{5}{6}$ را روی محور نشان دهید و آن را A بنامید.

2- از نقطهٔ A به اندازهٔ $\frac{1}{4}$ به طرف چپ محور بروید، به کدام نقطه می‌رسید؟

3- حاصل $\frac{1}{4}-\frac{5}{6}$ را با استفاده از دریافت کوچک‌ترین مضرب مشترک به دست آورید.

مثال دوم : از عدد نسبتی $\frac{5}{4}$ عدد نسبتی $\frac{2}{3}$ را تفریق کنید.

حل :

$$\frac{5}{4}-(\frac{2}{3})=\frac{15-8}{12}=\frac{7}{12}$$

چه در جمع و چه در تفریق اعداد نسبتی، کافی است ابتدا مخرج مشترک را دریابیم و سپس صورت‌ها را جمع یا تفریق کنیم.

تمرین

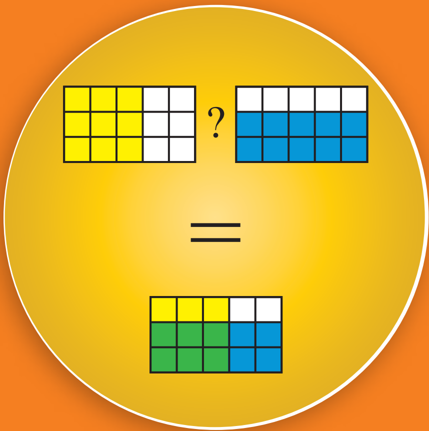
1- حاصل جمع اعداد نسبتی زیر را به دست آورید.

a) $\frac{4}{5}+\frac{-6}{5}=$, b) $\frac{7}{3}+\frac{3}{4}=$, c) $\frac{-5}{8}+\frac{-7}{12}=$, d) $\frac{-9}{16}+\frac{3}{8}=$

2- عدد نسبتی $\frac{5}{2}$ را روی محور اعداد نشان داده و از آن، عدد نسبتی $\frac{3}{2}$ را تفریق نمایید.

3- یک شاگرد در روز اول، $\frac{1}{5}$ حصهٔ یک کتاب را و در روز دوم $\frac{2}{5}$ حصهٔ همان کتاب را مطالعه کرد. چند حصهٔ کتاب مذکور باقی‌مانده است؟

ضرب و تقسیم اعداد نسبتی



شکل مقابل نشان‌دهندهٔ چه رابطه‌یی بین مستطیل ها است؟

فعالیت

1- یک نخ را به طول یک واحد در نظر گرفته، آن را نصف کنید.

2- این نصف‌ها را به سه حصهٔ مساوی تقسیم کنید.

3- طول هر حصهٔ به دست آمده، کدام قسمت واحد است؟

4- چه رابطه‌یی را بین $\frac{1}{2}$، $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{6}$ می‌توانید مشاهده کنید؟

برای ضرب دو عدد نسبتی، صورت را در صورت و مخرج را در مخرج ضرب می کنیم.

مثال اول: $\frac{2}{7}$ را ضرب در $(-\frac{3}{4})$ کنید.

حل:

$$(\frac{2}{7})\times(-\frac{3}{4})=\frac{2}{7}\times\frac{(-3)}{4}=\frac{(-6)}{28}=\frac{-3}{14}=-\frac{3}{14}=\frac{3}{-14}$$

مثال دوم: عدد نسبتی $(-\frac{8}{15})$ را در عدد نسبتی $(-\frac{3}{4})$ ضرب کنید:

حل:

$$(-\frac{8}{15})\ (-\frac{3}{4})=(\frac{-8}{15}\times\frac{-3}{4})=\frac{(-8)\times(-3)}{15\times4}=\frac{24}{60}=\frac{2}{5}$$

حالا تقسیم دو عدد نسبتی را در مثال‌های زیر بررسی می کنیم:

مثال سوم: $\frac{7}{10}$ را بر $\frac{3}{5}$ تقسیم کنید.

حل:
$$\frac{7}{10} \div \frac{3}{5} = \frac{7}{10} \times \frac{5}{3} = \frac{35}{30} = \frac{7}{6}$$

مثال چهارم: عدد نسبتی $(-3\frac{1}{2})$ را بر عدد نسبتی $(-\frac{2}{3})$ تقسیم کنید.

حل:
$$(-3\frac{1}{2}) \div (-\frac{2}{3}) = (-\frac{7}{2}) \div (-\frac{2}{3}) = (-\frac{7}{2}) \times (-\frac{3}{2}) = \frac{21}{4}$$

در عملیهٔ ضرب اعداد نسبتی، صورت را در صورت و مخرج را در مخرج ضرب می کنیم و در عملیهٔ تقسیم، عدد دوم نسبتی(مقسوم علیه) معکوس و سپس مانند عملیهٔ ضرب عمل می‌شود.

تمرین

1- اعداد زیر را در هم ضرب نموده و جواب آن‌ها را به ساده‌ترین شکل بنویسید.

a) $\frac{41}{5} \times \frac{13}{2}$, b) $(\frac{-12}{3} \times \frac{-5}{6})$, c) $\frac{15}{16} \times (-\frac{12}{5})$

d) $(\frac{7}{-11}) \times (\frac{-13}{9})$, e) $(-\frac{16}{15}) \times \frac{3}{4}$, f) $(-\frac{8}{3}) \times \frac{4}{5} \times (-\frac{3}{4})$

2- $\frac{2}{3}$ حصهٔ عدد 111 چند می‌شود؟

3- هر انسان کم از کم باید هر روز در برابر هر کیلو گرام وزن خود $\frac{1}{2}$ دیسی لیتر آب بنوشد. یک شخص با وزن 70 کیلو گرام روزانه به چه مقدار آب ضرورت دارد؟

خواص عملیه‌های اعداد نسبتی



احمد و محمود می خواهند یک اتاق را رنگ کنند.
احمد $\frac{2}{5}$ حصهٔ کار و محمود $\frac{1}{3}$ حصهٔ کار را انجام می‌دهد، احمد می گوید: بـرای آنکه ببینیم چقدر کار انجام شده اســت، باید: $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}$ را جمع کنیم؛ اما محمود می گوید، باید حاصل جمع $\frac{2}{5}+\frac{1}{3}$ را به دست آوریم، به نظر شما حاصل جمع آن‌ها با هم فرق می کند؟

فعالیت

1- نخی را به طول 1m در نظر بگیرید؛ بعد آن را نصف کنید و سپس هر نصف را به سه قسمت مساوی تقسیم کنید، اکنون طول هر قسمت را حساب کنید.

2- اگر نخ دیگری به طول 1m را ابتدا سه قسمت مساوی کرده و بعد هر قسمت را نصف کنید، طول هر نصف مساوی به چند خواهد بود؟

3- طول این دو قطعه نخ با هم چه رابطه یی دارند؟

در فعالیت بالا نتیجه حاصل می‌شود که خاصیت تبدیلی در ضرب اعداد نسبتی نیز صدق می کند.

مثال اول: با استفاده از اعداد $\frac{7}{5}$ و $(-\frac{3}{4})$ خاصیت تبدیلی جمع و ضرب را در اعداد نسبتی نشان دهید.

$$\frac{7}{5}+(-\frac{3}{4})=\frac{28-15}{20}=\frac{13}{20} \quad , \quad (-\frac{3}{4})+\frac{7}{5}=\frac{-15+28}{20}=\frac{13}{20}$$

از این رو:

$$\boxed{(-\frac{3}{4})+\frac{7}{5}=\frac{7}{5}+(-\frac{3}{4})}$$

به همین ترتیب داریم که:

$$(\frac{7}{5})\times(\frac{-3}{4})=\frac{-21}{20} \quad , \quad (-\frac{3}{4})\times(\frac{7}{5})=\frac{-21}{20}$$

از این رو:

$$\boxed{(\frac{-3}{4})\times\frac{7}{5}=\frac{7}{5}\times(-\frac{3}{4})}$$

مثال دوم: عدد نسبتی $\frac{3}{2}$ را از عدد نسبتی $\frac{5}{2}$ تفریق نموده و در آن خاصیت تبدیلی را بررسی کنید.

حل

$$\frac{5}{2}-\frac{3}{2}=\frac{5-3}{2}=\frac{2}{2}=1$$

$$\frac{3}{2}-\frac{5}{2}=\frac{3-5}{2}=\frac{-2}{2}=-1$$

لذا: $\frac{5}{2}-\frac{3}{2}\neq\frac{3}{2}-\frac{5}{2}$ است و خاصیت تبدیلی در عملیهٔ تفریق صدق نمی‌کند.

مثال سوم: عدد $\frac{4}{3}$ را بر $\frac{2}{3}$ تقسیم نموده و خاصیت تبدیلی را در آن بررسی کنید.

حل:

$$\frac{4}{3}\div\frac{2}{3}=\frac{4}{3}\times\frac{3}{2}=\frac{12}{6}=2$$

$$\frac{2}{3}\div\frac{4}{3}=\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{3}\div\frac{4}{3}\neq\frac{4}{3}\div\frac{2}{3}$$

دیده می‌شود که:

خاصیت تبدیلی در عملیهٔ تقسیم اعداد نسبتی صدق نمی‌کند. خاصیت تبدیلی تنها در عملیه‌های جمع و ضرب اعداد نسبتی صدق می‌کند.

تمرین

در جاهای خالی عدد مناسب را بنویسید.

a) $-\frac{1}{5}\times\frac{17}{2}=(\quad)\times(-\frac{1}{5})$

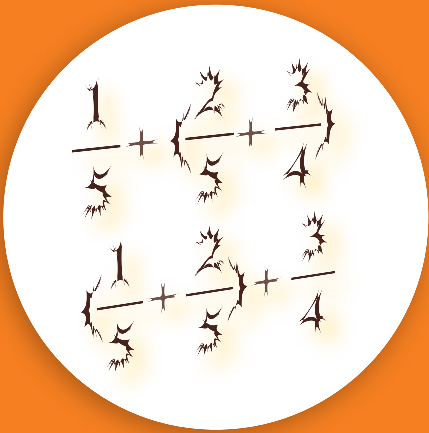
b) $(-\frac{8}{3})+(\quad)=\frac{1}{2}+(-\frac{8}{3})$

c) $\frac{8}{2}\times(-5)=(-5)\times(\quad)$

d) $\frac{-2}{3}\times(\frac{5}{-6})=(-\frac{5}{6})\times(\frac{}{-3})$

e) $\frac{9}{2}\times(5+6)=(11)\times(\frac{9}{})$

خاصیت اتحادی



اگـر عدد $\frac{1}{5}$ با حاصل جمـع اعداد $\frac{2}{5}$ و $\frac{3}{4}$ جمع شـود و یا اگر حاصـل جمع دو عدد $\frac{1}{5}$ و $\frac{2}{5}$ با عدد $\frac{3}{4}$ جمع شـود آیا این دو حاصل جمع با هم فرق دارند؟

فعالیت

الف) ابتدا دو عدد نسبتی $\frac{2}{3}$ و $\frac{4}{5}$ را با هم جمع کنید.

ب) حاصل جمع (الف) را با عدد نسبتی $\frac{6}{7}$ جمع کنید.

پ) عدد $\frac{4}{5}$ و عدد $\frac{6}{7}$ را باهم جمع کنید.

ت) حاصل جمع (پ) را با عدد نسبتی $\frac{2}{3}$ جمع کنید.

ث) حالا حاصل جمع به دست آمدهٔ (ب) و (ت) را باهم مقایسه کنید.

در فعالیت بالا ملاحظه می‌شود که:

$$(\frac{2}{3}+\frac{4}{5})+\frac{6}{7}=\frac{2}{3}+(\frac{4}{5}+\frac{6}{7})$$

این خاصیت را خاصیت اتحادی عملیهٔ جمع می‌نامند.

مثال اول: آیا $(\frac{3}{2}+\frac{2}{5})+\frac{3}{5}=\frac{3}{2}+(\frac{2}{5}+\frac{3}{5})$ است؟

حل: با کمی دقت می‌بینیم که اگر $\frac{3}{5}$ و $\frac{2}{5}$ را با هم جمع کنیم، کار ما ساده‌تر می‌شود؛ پس از خاصیت اتحادی جمع استفاده می کنیم.

$$\frac{3}{2}+(\frac{2}{5}+\frac{3}{5})=\frac{3}{2}+1=1\frac{1}{2}+1=2\frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{2}+\frac{2}{5}=\frac{15+4}{10}=\frac{19}{10}$$

$$\frac{19}{10}+\frac{3}{5}=\frac{19+6}{10}=\frac{25}{10}=2\frac{1}{2}$$

مثال دوم: درستی $\frac{2}{3}\times(\frac{4}{5}\times\frac{6}{7})=(\frac{2}{3}\times\frac{4}{5})\times\frac{6}{7}$ را نشان دهید.

$$\frac{2}{3}\times(\frac{4}{5}\times\frac{6}{7})=\frac{2}{3}\times(\frac{24}{35})=\frac{48}{105}=\frac{16}{35}\ ,\qquad (\frac{2}{3}\times\frac{4}{5})\times\frac{6}{7}=(\frac{8}{15})\times\frac{6}{7}=\frac{48}{105}=\frac{16}{35}$$

لذا داریم که: $\frac{2}{3}\times(\frac{4}{5}\times\frac{6}{7})=(\frac{2}{3}\times\frac{4}{5})\times\frac{6}{7}=\frac{16}{35}$

بنابر این، خاصیت اتحادی در عملیهٔ ضرب اعداد نسبتی صدق می کند.

مثال سوم: خاصیت اتحادی تفریق را با $\frac{4}{3}-(\frac{1}{2}-\frac{1}{5})$ بررسی کنید.

حل:

$$\frac{4}{3}-(\frac{1}{2}-\frac{1}{5})=\frac{4}{3}-(\frac{5-2}{10})=\frac{4}{3}-(\frac{3}{10})=\frac{40-9}{30}=\frac{31}{30}$$

$$(\frac{4}{3}-\frac{1}{2})-\frac{1}{5}=(\frac{8-3}{6})-\frac{1}{5}=(\frac{5}{6})-\frac{1}{5}=\frac{25-6}{30}=\frac{19}{30}$$

از این‌رو: $\boxed{\frac{4}{3}-(\frac{1}{2}-\frac{1}{5})\neq(\frac{4}{3}-\frac{1}{2})-\frac{1}{5}}$

نامساوی ($\neq$) بالا نشان می‌دهد که: خاصیت اتحادی در عملیهٔ تفریق صدق نمی کند.

مثال چهارم: خاصیت اتحادی را برای تقسیم سه عدد نسبتی بررسی کنید.

حل:

$$\frac{4}{3}\div(\frac{1}{2}\div\frac{1}{5})=\frac{4}{3}\div(\frac{1}{2}\times\frac{5}{1})=\frac{4}{3}\div\frac{5}{2}=\frac{4}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{8}{15}$$

$$(\frac{4}{3}\div\frac{1}{2})\div\frac{1}{5}=(\frac{4}{3}\times\frac{2}{1})\div\frac{1}{5}=(\frac{8}{3})\div\frac{1}{5}=\frac{8}{3}\times\frac{5}{1}=\frac{40}{3}$$

لذا: $\boxed{\frac{4}{3}\div(\frac{1}{2}\div\frac{1}{5})\neq(\frac{4}{3}\div\frac{1}{2})\div\frac{1}{5}}$

خاصیت اتحادی تنها در عملیه‌های جمع و ضرب اعداد نسبتی صدق می‌کند؛ اما در عملیه‌های تفریق و تقسیم صدق نمی کند.

تمرین

خاصیت اتحادی را در عملیه های زیر بررسی کنید.

a) $(\frac{4}{3}+\frac{2}{5})+\frac{5}{7}=$

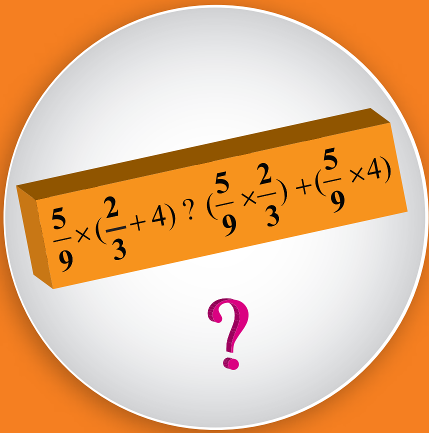
b) $\frac{5}{7}\times(\frac{4}{9}\times\frac{3}{5})=$

c) $\frac{6}{5}-(\frac{2}{3}+\frac{4}{9})=$

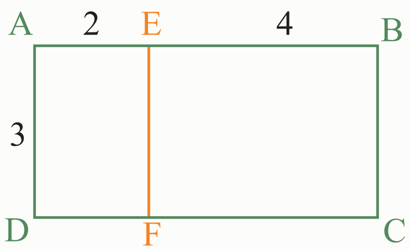
d) $\frac{4}{3}\div(\frac{5}{3}\div\frac{2}{5})=$

خاصیت توزیعی

خاصیـت توزیعی ضـرب بالای جمـع را در اعداد تام دیده اید، آیا این خاصیت در اعداد نسبتی نیز صدق می کند؟



فعالیت



شکل مقابل را در نظر بگیرید.

- مساحت مستطیل AEFD چقدر است؟
- مساحت مستطیل EBCF چقدر است؟
- مساحت مستطیل ABCD چقدر است؟
- آیا می توانیم بگوییم که:

مساحت EBCF + مساحت AEFD = مساحت ABCD

- آیا می توانیم بنویسیم که: $3(2+4)=(3\times2)+(3\times4)$

هرگاه یک عدد در مجموع دو عدد دیگر ضرب شود، می‌توان آن عدد را جداگانه در هر یک از اعداد ضرب و حاصل ضرب‌ها را با هم جمع کرد. این خاصیت را خاصیت توزیعی ضرب بالای جمع می‌نامند.

مثال اول:

خاصیت توزیعی را در عملیهٔ ضرب بالای جمع بررسی کنید.

حل: اولاً عملیهٔ ضرب را به صورت معمولی حل می کنیم؛ یعنی:

$$\frac{15}{8}\times(\frac{4}{3}+\frac{2}{5})=\frac{15}{8}\times(\frac{20+6}{15})=\frac{15}{8}\times(\frac{26}{15})=\frac{390}{120}=\frac{39}{12}=\frac{13}{4}=3\frac{1}{4}$$

حالا عملیهٔ بالا را به صورت توزیعی بررسی می کنیم؛ یعنی:

$$\frac{15}{8}\times(\frac{4}{3}+\frac{2}{5})=\frac{15}{8}\times\frac{4}{3}+\frac{15}{8}\times\frac{2}{5}=\frac{60}{24}+\frac{30}{40}=\frac{5}{2}+\frac{3}{4}=\frac{10+3}{4}=\frac{13}{4}=3\frac{1}{4}$$

از مقایسهٔ دو طریق حل فوق نتیجه می گیریم که:

$$\frac{15}{8}\times(\frac{4}{3}+\frac{2}{5})=(\frac{15}{8}\times\frac{4}{3})+(\frac{15}{8}\times\frac{2}{5})=\frac{13}{4}=3\frac{1}{4}$$

مثال دوم: حاصل $\frac{2}{3}\div(\frac{-4}{5}+\frac{7}{2})$ را نخست بدون تطبیق خاصیت توزیعی و سپس با تطبیق خاصیت توزیعی به دست آورید و نتیجه را با هم مقایسه کنید. آیا خاصیت توزیعی تقسیم بالای عملیهٔ جمع صدق می کند؟

حل:

$$\frac{2}{3}\div(\frac{-4}{5}+\frac{7}{2})=\frac{2}{3}\div(\frac{-8+35}{10})=\frac{2}{3}\div(\frac{27}{10})=\frac{2}{3}\times(\frac{10}{27})=\frac{20}{81}$$

حالا خاصیت توزیعی را تطبیق می‌نماییم:

$$\frac{2}{3}\div(\frac{-4}{5}+\frac{7}{2})=\frac{2}{3}\div(\frac{-4}{5})+\frac{2}{3}\div\frac{7}{2}=\frac{2}{3}\times(\frac{5}{-4})+\frac{2}{3}\times\frac{2}{7}=\frac{10}{-12}+\frac{4}{21}=\frac{-70+16}{84}=\frac{-54}{84}=\frac{-9}{14}$$

از این رو:

$$\boxed{\frac{2}{3}\div(\frac{-4}{5}+\frac{7}{2})\neq(\frac{2}{3}\div\frac{-4}{5})+(\frac{2}{3}\div\frac{7}{2})}$$

از اینجا نتیجه می‌شود که: $\frac{20}{81}\neq\frac{-9}{14}$

خاصیت توزیعی ضرب بالای جمع در اعداد نسبتی صدق می کند؛ اما در عملیهٔ تقسیم بالای جمع صدق نمی کند.

تمرین

1- خاصیت توزیعی را در عملیه‌های زیر بررسی کنید:

a) $\frac{4}{7}\times(\frac{3}{2}+\frac{1}{4})$, b) $\frac{-5}{6}\times(\frac{-5}{3}-\frac{-2}{5})$, c) $\frac{1}{5}\times(\frac{2}{-3}+\frac{1}{-2})$

2- خاصیت توزیعی را در سؤال زیر بررسی کنید:

$(\frac{6}{5}+\frac{4}{3})\times\frac{3}{2}$

3- خاصیت توزیعی را در عملیه های زیر بررسی کنید:

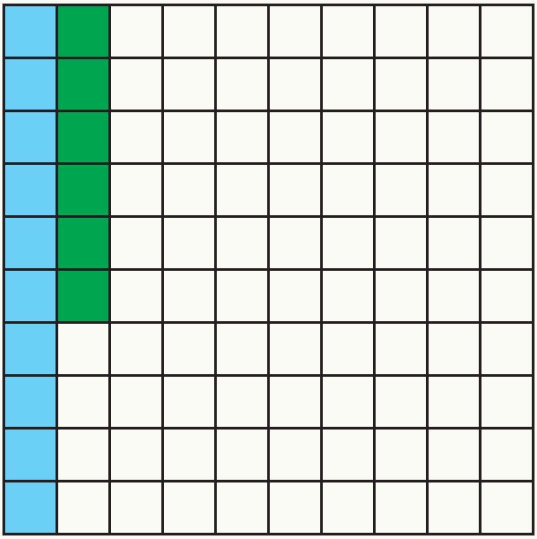
a) $\frac{6}{7}\div(\frac{3}{2}+\frac{1}{2})$, b) $\frac{-6}{1}\div(\frac{3}{4}-\frac{2}{3})$, c) $\frac{8}{-5}\div(\frac{3}{2}+\frac{-3}{4})$

تبدیل عدد نسبتی به عدد اعشاری



احمد و برادرش می‌خواهند کاری را در چهار روز انجام دهند. در انتهای روز اول احمد از برادرش می‌پرسد: «تا حالا چند فیصد کار را انجام داده ایم؟»

فعالیت



- چند مربع در شکل مقابل رنگ شده است؟
- چه کسری از مربع‌ها، رنگ آبی دارند؟ این مقدار را با عدد اعشاری نشان دهید.
- چه کسری از مربع‌ها، رنگ سبز دارند؟ این مقدار را با یک عدد اعشاری نشان دهید.
- چه کسری از مربع‌ها رنگ شده اند؟ این مقدار را با یک عدد اعشاری نشان دهید.

مثال اول: عدد نسبتی $\frac{257363}{100}$ را به صورت عدد اعشاری نمایش دهید.

حل:

$$\frac{257363}{100} = 2573\frac{63}{100} = 2573 + \frac{63}{100}$$

$$= 2573 + \frac{60}{100} + \frac{3}{100}$$

$$= 2573 + \frac{6}{10} + \frac{3}{100} = 2573.63$$

در این حالت، 2573 را جزء صحیح عدد و 0.63 را جزء اعشاری عدد مذکور می‌نامند.

فعالیت

اعداد 2.3125 و 0.412 را به صورت اعداد نسبتی بنویسید.

$$2.3125 = 2 + \frac{(\quad)}{10} + \frac{(\quad)}{100} + \frac{(\quad)}{1000} + \frac{(\quad)}{10000} = \frac{(\quad)}{10000}$$

$$0.412 = 0 + \frac{(\quad)}{10} + \frac{(\quad)}{100} + \frac{(\quad)}{1000} = \frac{(\quad)}{1000}$$

مثال دوم: عدد 2.32 را به صورت عدد نسبتی بنویسید.

حل:

$$2.32 = 2 + 0.3 + 0.02 = \frac{200}{100} + \frac{30}{100} + \frac{2}{100} = \frac{232}{100}$$

می‌توانیم اعداد نسبتی را به شکل اعداد اعشاری و اعداد اعشاری را به شکل اعداد نسبتی تبدیل کنیم.

تمرین

1- اعداد اعشاری 0.212 ، 0.420 و 5.215 را به شکل اعداد نسبتی نشان دهید.

2- اعداد نسبتی $\frac{4250}{1000}$ ، $\frac{235}{100}$ و $\frac{2410}{10000}$ را به شکل اعداد اعشاری بنویسید.

3- اعداد اعشاری 0.5 ، -1.5 و 1.25 را روی محور اعداد نشان دهید.

4- در جدول زیر، جزء صحیح و جزء اعشاری هر عدد را در محل‌های مشخص شده وارد کنید.

جزء اعشاری	جزء صحیح	عدد اعشاری
		12.1
		13.25
		1.7394
		0.16

خلاصهٔ فصل چهارم

- عدد نسبتی عددی است که معمولاً به شکل $\frac{n}{d}$ نشان داده می‌شود، در صورتی‌که n و d اعداد تام باشند و $d \neq 0$

اعداد نسبتی به نام اعداد گویا، اعداد ناطق «Rational Numbers» یاد می‌شوند.

- همان‌طوری‌که هر عدد تام بدون صفر دارای عدد متضاد است، هر عدد نسبتی نیز دارای عدد متضاد می‌باشد.
- ساده ساختن اعداد نسبتی، مانند ساده ساختن کسرعام بوده و در صورتی که صورت و مخرج به یک عدد قابل تقسیم باشند، آن را تقسیم می‌کنیم تا به اعدادی برسیم که دیگر قابل تقسیم نباشند.
- از دو عدد نسبتی همان عدد بزرگ‌تر است که در روی محور اعداد نظر به عدد دیگری، طرف راست قرار دارد، آنچه در مورد اعداد تام نیز مشاهده کرده‌اید.
- در مقایسهٔ دو عدد نسبتی که صورت‌ها و مخرج‌های شان با هم مساوی نیستند، نخست باید این دو عدد را هم‌مخرج نموده و سپس با هم مقایسه کنیم.
- جمع دو عدد نسبتی مانند جمع اعداد کسرعام است، طوری‌که اول کوچک‌ترین مخرج مشترک را پیدا نموده و سپس صورت‌ها را مانند اعداد تام با هم جمع می‌کنیم.
- عملیهٔ تفریق در اعداد نسبتی مانند عملیهٔ جمع است، با این تفاوت که در عملیهٔ تفریق فقط علامت مفروق تغییر می‌کند و سپس عملیهٔ جمع بالای آن تطبیق می‌گردد.
- در جمع و تفریق اعداد نسبتی می‌توانیم از محور اعداد نیز استفاده کنیم، چنانچه در مورد اعداد تام نیز از آن استفاده کرده‌ایم.
- در عملیهٔ ضرب اعداد نسبتی، صورت‌ها و مخرج‌ها در همدیگر ضرب می‌شوند؛ اما در عملیهٔ تقسیم، اول مقسوم علیه معکوس می‌گردد و سپس عملیهٔ ضرب را انجام می‌دهیم.

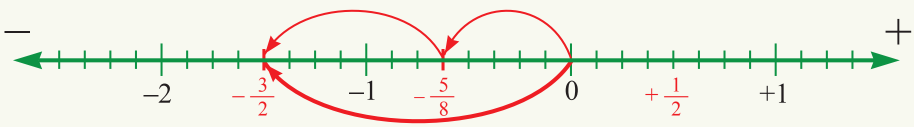
- خاصیت تبدیلی در عملیهٔ جمع و ضرب اعداد نسبتی صدق می‌کند، در حالی‌که این خاصیت در عملیهٔ تفریق و تقسیم اعداد نسبتی صدق نمی‌کند.
- خاصیت اتحادی در عملیهٔ جمع و ضرب اعداد نسبتی صدق می‌کند، در حالی‌که این خاصیت در عملیهٔ تفریق و تقسیم اعداد نسبتی صدق نمی‌کند.
- خاصیت توزیعی فقط در عملیهٔ ضرب بالای جمع و تفریق صدق می‌کند و بس.
- تبدیل اعداد نسبتی به اعداد اعشاری، مانند تبدیل کسر عام به اعشاری است و به همین ترتیب تبدیل اعداد اعشاری به اعداد نسبتی، مانند تبدیل اعداد اعشاری به کسر عام.

تمرین فصل چهارم

1- اعداد نسبتی زیر را روی محور اعداد نشان دهید:

a) $-\frac{4}{3}$, b) $\frac{-7}{3}$, c) $\frac{-1}{3}$, d) $\frac{2}{3}$, e) $\frac{7}{3}$

2- در محور اعداد زیر، اعداد نسبتی‌یی را که با هم جمع شده اند توسط اعداد بنویسید.



3- از عدد نسبتی $\frac{5}{2}$ عدد نسبتی $\frac{1}{2}$ را تفریق کنید و در روی محور اعداد نشان دهید.

4- اعداد نسبتی زیر را جمع و سپس خاصیت تبدیلی را در آن بررسی کنید.

$\frac{5}{2}+\frac{1}{3}$, $\frac{3}{5}-\frac{1}{7}$, $\frac{-6}{5}+(\frac{4}{3})$

5- خاصیت اتحادی را در ضرب‌های زیر بررسی کنید.

$\frac{8}{5}\times(\frac{4}{3}\times\frac{6}{10})$, $\frac{1}{2}\times(\frac{3}{5}\times\frac{5}{3})$, $\frac{-5}{6}\times(\frac{3}{2}\times\frac{3}{5})$

6- جاهای خالی را با اعداد مناسب پر کنید.

a) $(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})\times(\quad)=1$, b) $(\frac{3}{2}+\frac{-2}{9})\times(\quad)=1$

c) $(\quad)\times\frac{1}{3}=1$, d) $(\frac{3}{-2}+\frac{4}{5})\times\frac{1}{2}=(\frac{1}{2}\times\frac{4}{5})+(\qquad)$

7- خاصیت توزیعی را در سؤالات زیر بررسی کنید.

$$\frac{5}{-9}\times\left(\frac{-3}{4}-\frac{2}{3}\right) \quad , \quad \frac{-5}{8}\times\left(\frac{3}{-2}+\frac{-4}{3}\right) \quad , \quad \frac{6}{5}\times\left(\frac{-3}{4}+\frac{2}{5}\right)$$

8- خاصیت اتحادی در ست اعداد نسبتی، درکدام عملیه‌های زیر صدق نمی‌کند؟

a) جمع   b) ضرب   c) تفریق   d) تقسیم   e) هیچکدام

9- عدد نسبتی $\frac{-6}{5}$ را به عدد اعشاری تبدیل نموده و در روی محور اعداد نشان دهید؛ همچنین متضاد آن را به شکل اعشاری بنویسید.

10- اعداد اعشاری زیر را به شکل اعداد نسبتی بنویسید.

1.23412 , 5.2345 , 2.342 , 0.340

11- دو عدد اعشاری 3.234 و 4.543 را به شکل اعداد نسبتی نشان دهید.

12- خاصیت تبدیلی در کدام عملیه‌های اعداد نسبتی زیر صدق نمی‌کند؟

a) ضرب   b) جمع   c) تفریق   d) تقسیم

13- خاصیت توزیعی در کدام عملیهٔ اعداد نسبتی صدق می‌کند؟

a) ضرب بالای جمع   b) ضرب بالای تفریق   c) هر دو درست اند.

14- اعداد اعشاری 1.25 و 2.5 را با اعداد نسبتی نشان داده و همچنین متضاد آن‌ها را به شکل اعداد نسبتی در روی محور اعداد نشان دهید.

فصل پنجم

مثلث‌ها و چندضلعی‌ها



مثلث‌ها در اطراف ما استند.

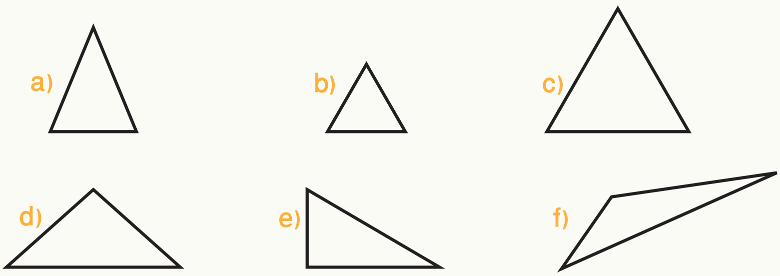
اقسام مثلث از حیث اضلاع



در شکل مقابل کدام اشکال هندسی را مشاهده می کنید؟

فعالیت

- در شکل‌های زیر طول هر ضلع را اندازه‌گیری کرده و اندازهٔ آن را بنویسید.
- اگر بخواهیم این مثلث‌ها را دسته‌بندی کنیم، کدام مثلث‌ها در یک دسته قرار می‌گیرد؟



- برای قراردادن مثلث‌ها در هر دسته‌بندی چه خصوصیتی را در نظر گرفته‌اید؟
- زاویه‌های مثلث‌هایی را که اضلاع آن‌ها با هم برابراند، اندازه بگیرید. چه نتیجه یی به‌دست می‌آورید؟
- زاویه‌های مثلث‌هایی را که دو ضلع مساوی دارند، اندازه بگیرید، چه نتیجه یی به دست می‌آورید؟

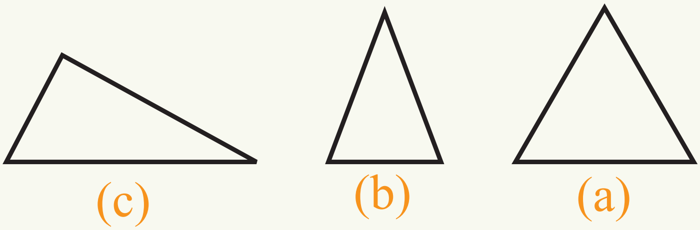
از فعالیت فوق نتیجه می‌گیریم که مثلث‌ها را می‌توانیم از نظر طول اضلاع به سه دسته تقسیم‌بندی کنیم:

– مثلثی که سه ضلع آن با هم مساوی باشند، مثلث متساوی‌الاضلاع نامیده می‌شود. در هر مثلث متساوی‌الاضلاع سه زاویهٔ آن نیز با هم برابر اند.

– مثلثی که دو ضلع آن با هم مساوی باشند، مثلث متساوی‌الساقین نامیده می‌شود، هر یک از ضلع‌های مساوی در مثلث متساوی‌الساقین را ساق مثلث و ضلع سوم را قاعدهٔ مثلث می‌نامند. در مثلث متساوی‌الساقین دو زاویهٔ کنار ساق‌ها با هم مساوی‌اند.

– مثلثی که طول هر سه ضلع آن با هم مساوی نیستند، مثلث مختلف‌الاضلاع نامیده می‌شود.

مثال: هر یک از مثلث‌های شکل زیر را نظر به اضلاع شان نام‌گذاری کنید.



حل: ابتدا طول هر ضلع مثلث را اندازه کرده و سپس نام‌گذاری می‌کنیم. مثلث a که سه ضلع برابر دارد متساوی‌الاضلاع، مثلث b که دو ضلع برابر دارد متساوی‌الساقین، و مثلث c که طول هر سه ضلع آن مختلف می‌باشد مختلف‌الاضلاع است.

تمرین

1– یک مثلث متساوی‌الاضلاع را رسم کنید که هر ضلع آن 4cm باشد.

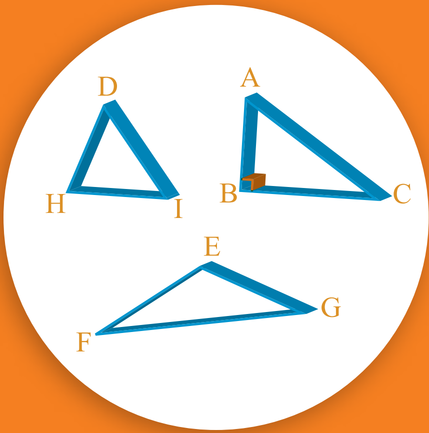
2– یک مثلث متساوی‌الساقین رسم کنید که دو ضلع مساوی آن هر یک 3cm بوده و ضلع سوم آن کیفی باشد.

3– یک مثلث متساوی‌الساقین را رسم نمایید که یک زاویهٔ آن 90° باشد.

4– طول اضلاع یک مثلث به ترتیب 5cm، 4cm و 8cm است. این مثلث به کدام نام یاد می‌شود؟

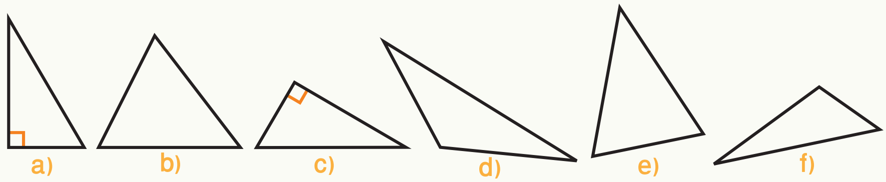
اقسام مثلث نظر به زاویه

اگر بخواهید که مثلث‌ها را نظر به زاویه نام گذاری کنید، زوایای مثلث را با کدام زاویه مقایسه می کنید؟



فعالیت

مثلث‌های زیر را در نظر بگیرید.

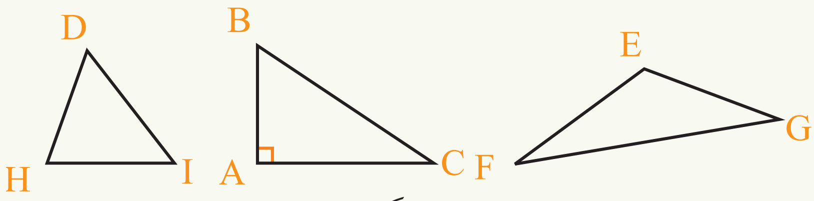


- ابتدا زاویه‌های هر مثلث را اندازه بگیرید و درجهٔ آن را مشخص کنید.
- زاویه‌های هر یک از مثلث‌ها را با زاویهٔ قایمه مقایسه کنید.
- در کدام مثلث‌ها، تمام زاویه‌های آن کوچک‌تر از زاویهٔ قایمه استند؟
- کدام یک از مثلث‌ها زاویهٔ قایمه دارد؟
- کدام یک از مثلث‌ها زاویهٔ بزرگ‌تر از قایمه دارد؟
- در جدول زیر نام مثلث‌ها را بنویسید.

مثلث‌هایی که زاویه های آن کوچک‌تر از زاویهٔ قایمه باشند	مثلث‌هایی که یک زاویه آن بزرگ‌تر از زاویهٔ قایمه باشد	مثلث‌هایی که تنها یک زاویهٔ آن قایمه باشد

مثلث‌ها را از حیث زاویه به سه دسته تقسیم کرده‌اند:
– مثلثی که در آن یک زاویهٔ قایمه وجود دارد، مثلث قایم‌الزاویه نامیده می‌شود.
– مثلثی که در آن یک زاویهٔ بزرگ‌تر از 90° وجود دارد، مثلث منفرج الزاویه نامیده می‌شود.
– مثلثی که تمام زاویه‌های آن کوچک‌تر از 90° است، مثلث حادالزاویه نامیده می‌شود.

مثال: کدام یک از مثلث‌های زیر حادالزاویه، قایم‌الزاویه و منفرج‌الزاویه است؟



حل: ابتدا زاویه‌های مثلث‌ها را اندازه می گیریم:
– مثلث BAC که یک زاویهٔ آن 90° می‌باشد، مثلث قایم‌الزاویه است.
– مثلث EGF که یک زاویهٔ آن بزرگ‌تر از 90° است، مثلث منفرج‌الزاویه می‌باشد.
– مثلث DHI که تمام زاویه‌های آن کوچک‌تر از 90° است، مثلث حادالزاویه می‌باشد.
در تقسیم مثلث‌ها از حیث زاویه، زاویهٔ قایمه را معیار قرار می دهند.

تمرین

1– مثلثی را رسم کنید که یک ضلع آن 3cm بوده و دو زاویهٔ مجاور آن هر یک 60° باشد، نوعیت این مثلث را مشخص کنید.
2– مثلثی که دو ضلع آن با هم مساوی و زاویهٔ بین آن‌ها 90° است، چه نوع مثلثی می‌باشد، از حیث اضلاع و زوایا، نوعیت آن را تعیین کنید.
3– مثلثی رسم کنید که یک زاویهٔ آن 120° و ضلع مجاور این زاویه 4cm باشد. چند تا از این مثلث‌ها رسم کرده می توانید؟
4– یک مثلث منفرج‌الزاویه رسم کنید که زاویهٔ منفرجهٔ آن 100° و طول دو ضلع مجاور این زاویه 4cm و 6cm باشد.

میانه، ارتفاع و ناصف‌الزاویهٔ مثلث

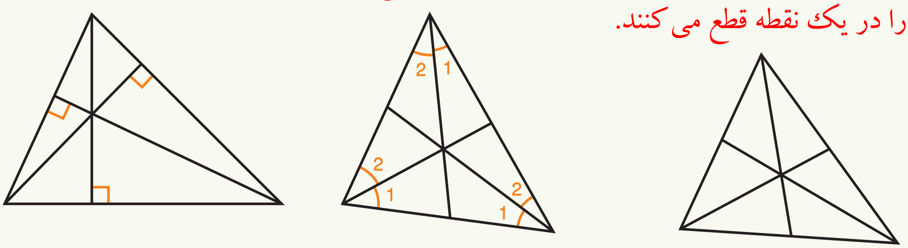


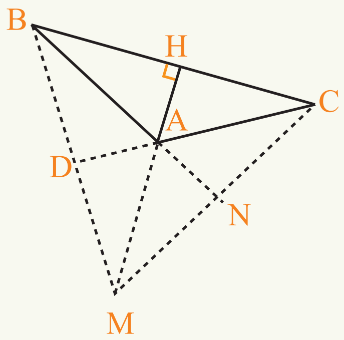
تا به حال سعی کرده‌اید، یک پنسل را عمود گذاشته و یک شی مثلثی‌شکل را روی آن قرار دهید؟

فعالیت

- یک مثلث کیفی $\overset{\Delta}{ABC}$ رسم کنید.
- سه ارتفاع این مثلث را ترسیم کنید.
- آیا نقطه‌یی را پیدا کرده می‌توانید که هر سه ارتفاع مثلث در آن نقطه همدیگر را قطع کنند؟
- سه میانهٔ این مثلث را رسم کنید، آیا هرسه میانه در یک نقطه همدیگر را قطع می کنند؟
- سه ناصف‌الزاویهٔ این مثلث را رسم کنید. آیا سه ناصف‌الزاویه، یک دیگر را در یک نقطه نیز قطع می کنند؟

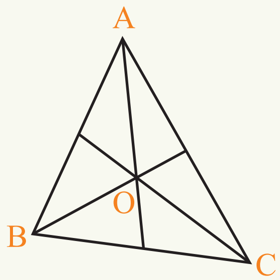
فعالیت بالا نشان می‌دهد که در یک مثلث، سه ارتفاع، سه میانه و سه ناصف‌الزاویه یکدیگر را در یک نقطه قطع می کنند.





مثال اول: یک مثلث منفرج الزاویهٔ $\overset{\Delta}{ABC}$ را رسم کنید. نقطه‌یی را پیدا کنید که در آن سه ارتفاع همدیگر را قطع می‌کنند.

حل: چون در یک مثلث منفرج الزاویه، بعضی ارتفاع‌ها در خارج مثلث واقع‌اند، نقطهٔ تقاطع آن‌ها نیز خارج از مثلث قرار دارد.



مثال دوم: یک مثلث حادالزاویهٔ کیفی $\overset{\Delta}{ABC}$ را رسم کرده و نقطهٔ تقاطع میانه‌های آن را پیدا کنید.

حل: یک مثلث حاد الزاویهٔ کیفی را رسم کرده؛ سپس میانه‌های آن را رسم می‌کنیم، دیده می‌شود که میانه‌ها در یک نقطهٔ داخل مثلث همدیگر را قطع می‌کنند؛ این همان نقطه‌یی است که شی مثلث‌شکل در آن نقطه بالای نوک پنسل به حالت تعادل قرار می‌گیرد، از این‌رو گفته می‌توانیم که نقطهٔ تقاطع میانه‌های مثلث، مرکز ثقل مثلث می‌باشد.

میانه‌ها، ارتفاع‌ها و ناصف‌الزاویه‌های یک مثلث در یک نقطه همدیگر را قطع می‌کنند.

تمرین

1- یک مثلث قایم‌الزاویه رسم کنید و نقطهٔ تقاطع میانه‌ها را در آن نشان دهید.

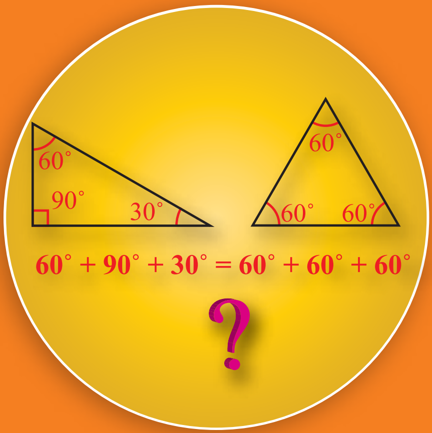
2- ارتفاع‌های مثلثی را رسم کنید که اضلاع آن 5cm، 3cm و 6cm استند.

3- یک مثلث متساوی‌الساقین که طول هر ساق آن 4cm و قاعدهٔ آن 6cm است رسم کنید و نقطهٔ تقاطع ناصف الزوایای آن را پیدا کنید.

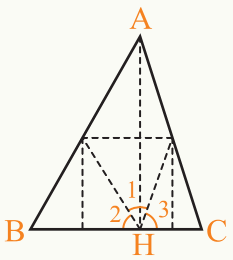
4- یک مثلث متساوی‌الاضلاع ترسیم کرده و میانه‌ها، ارتفاع‌ها و ناصف‌الزاویه‌های آن را نشان دهید. چه نتیجه‌یی در آن مشاهده می‌کنید؟

مجموع زاویه‌های داخلی مثلث

آیا مجموع زاویه‌های داخلی تمام مثلث‌ها با هم مساوی اند؟



فعالیت



- یک مثلث کیفی $\overset{\Delta}{ABC}$ را روی کاغذ رسم نموده و آن را قیچی نمایید.
- از رأس A، ارتفاع وارد بر قاعده را رسم کنید و محل تقاطع ارتفاع با قاعده را H بنامید.
- مثلث را طوری قات کنید که A روی H قرار گیرد. (خط‌های نقطه‌چین در شکل، محل قات کردن را نشان می‌دهند.)
- این بار مثلث را طوری قات کنید که رأس B و رأس C نیز روی H قرار گیرند.
- از روی قات کردن، جواب سؤال‌های زیر را پیدا کنید.

$$\hat{H}_1+\hat{H}_2+\hat{H}_3=? \quad , \quad \hat{A}=? \quad , \quad \hat{B}=? \quad , \quad \hat{C}=?$$

از این رو داریم که: $\hat{H}_1+\hat{H}_2+\hat{H}_3=\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ$

زیرا زاویه‌یی که در یک طرف خط مستقیم تشکیل می‌شود 180° است.

- زاویه‌های مثلث را با نقاله اندازه بگیرید و نتیجه‌های بالا را بررسی کنید.

از فعالیت بالا می‌توان نتیجه گرفت که:

مجموع زوایای داخلی یک مثلث مساوی به 180° است و هر یک از زاویه‌های داخل مثلث را یک زاویهٔ داخلی یا به صورت مختصر زاویهٔ مثلث می‌نامند.

مثال اول: در مثلث متساوی‌الساقین $\overset{\Delta}{ABC}$، اندازهٔ یکی از زاویه‌های مساوی آن برابر به 70° است، اندازهٔ زاویهٔ سومی مثلث را پیدا کنید.

حل: چون مثلث، متساوی‌الساقین است، بنا بر این دو زاویهٔ مجاور دو ساق با هم برابرند.

پس: $\hat{B} = \hat{C} = 70^\circ$

چون مجموع زاویه‌های داخلی یک مثلث 180° است، می‌توان نوشت که:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ \quad , \quad 70^\circ+70^\circ+\hat{A}=180^\circ \quad , \quad 140^\circ+\hat{A}=180^\circ$$

از این جا معلوم می‌شود که $\hat{A}=40^\circ$ است.

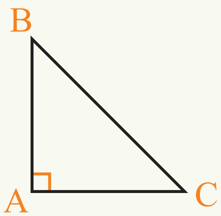
مثال دوم: زاویه‌های حادهٔ یک مثلث قایم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین چند درجه است؟

حل: چون مثلث قایم‌الزاویه است، یک زاویهٔ آن 90° و دو زاویهٔ دیگر آن حاده می‌باشند، مانند شکل زیر:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ$$

$$90^\circ+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ$$

$$\hat{B}+\hat{C}=90^\circ$$



چون مثلث متساوی‌الساقین است:

$$\hat{B}=\hat{C}=90^\circ\div 2=45^\circ$$

پس هر زاویهٔ حادهٔ آن 45° می‌باشد.

فعالیت

یک مثلث قایم‌الزاویه رسم کنید که هر ضلع قایم آن 5cm باشد. دو زاویهٔ دیگر این مثلث چند درجه است؟ ابتدا بدون نقاله و سپس توسط نقاله اندازهٔ زاویه‌ها را دریابید.

مجموع زاویه‌های داخلی در تمام مثلث‌ها 180° است و به نوعیت مثلث ارتباط ندارد.

تمرین

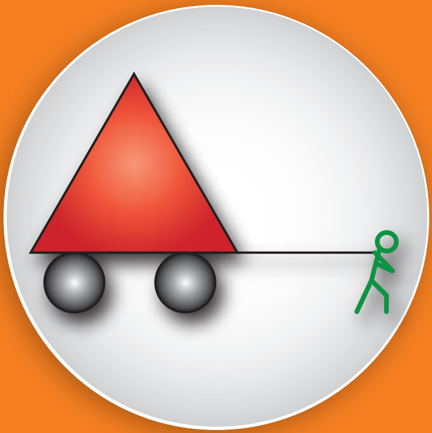
1- اگر در یک مثلث متساوی‌الساقین، زاویه بین دو ساق برابر به 50° باشد، هر یک از زاویه‌های دیگر آن چند درجه است؟

2- در یک مثلث متساوی‌الاضلاع، هر زاویهٔ آن چند درجه است ؟

3- اگر در یک مثلث متساوی‌الساقین، زاویهٔ بین دو ساق 70° باشد، دو زاویهٔ دیگر آن هر کدام چند درجه است؟

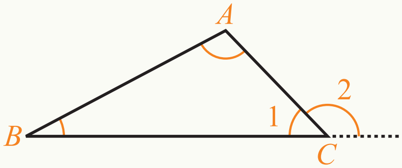
زاویهٔ خارجی یک مثلث

چند نوع زاویه را در شکل مقابل می‌بینید؟



فعالیت

- مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ را در نظر بگیرید. ضلع $\overline{BC}$ را از نقطهٔ C امتداد می‌دهیم تا زاویهٔ C_2 تشکیل شود.
- به سؤال‌های زیر پاسخ دهید:



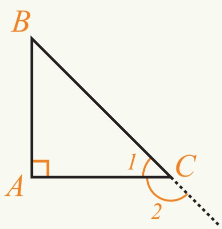
$$\hat{C}_1+\hat{C}_2=?$$

$$\hat{C}_1+\hat{A}+\hat{B}=?$$

- از دو تساوی بالا چه نتیجه‌یی به دست می‌آید؟

در هر مثلث زاویه‌یی که از امتداد یکی از اضلاع با ضلع دیگر مثلث تشکیل می‌شود، زاویهٔ خارجی نام دارد. اندازهٔ هر زاویهٔ خارجی در یک مثلث مساوی به مجموع دو زاویهٔ داخلی غیر مجاور آن است.

مثال اول: در یک مثلث قایم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین می‌خواهیم اندازهٔ زاویهٔ خارجی را که از امتداد وتر آن به دست می‌آید، اندازه بگیریم. آیا در این وضعیت فرق می‌کند که وتر را به کدام جهت امتداد دهیم؟



حل: چون مثلث قایم‌الزاویه است، یک زاویهٔ 90° دارد؛ چون متساوی‌الساقین است، هر یک از زاویه‌های حادهٔ آن 45° است.

$$\hat{C}_2=\hat{A}+\hat{B} \qquad \hat{C}_2=90^\circ+45^\circ=135^\circ$$

چون دو زاویهٔ حاده با هم مساوی اند:

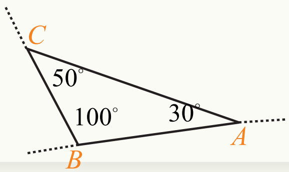
زاویه‌های خارجی آن‌ها نیز با هم مساوی اند و فرقی نمی کند که زاویهٔ خارجی در کدام طرف وتر قرار داشته باشد.

مثال دوم: در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$، $\hat{A}=50^\circ$ و $\hat{B}=70^\circ$ است. زاویهٔ خارجی C چند درجه است؟

$$\hat{C}_2=\hat{A}+\hat{B}=50^\circ+70^\circ=120^\circ$$

فعالیت

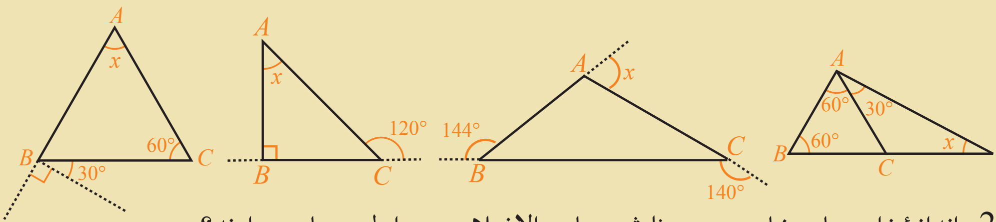
اندازهٔ هر سه زاویهٔ خارجی مثلث مختلف‌الاضلاع زیر را پیدا کنید.



هر یک از زاویهٔ خارجی یک مثلث، مساوی به مجموع دو زاویهٔ داخلی غیر مجاور آن می‌باشد.

تمرین

1- در اشکال زیر، اندازهٔ زاویه‌هایی را که به علامت x مشخص شده اند، به دست آورید:



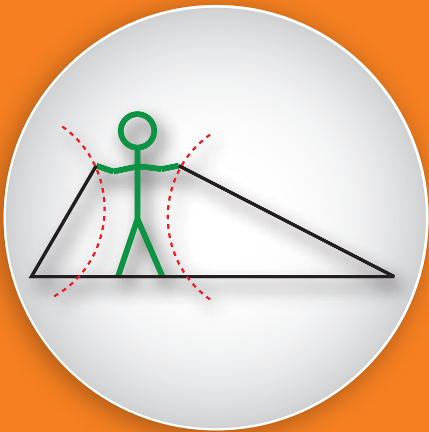
2- اندازهٔ زاویه‌های خارجی در مثلث متساوی‌الاضلاع چه رابطه یی با هم دارند؟

3- یک مثلث قایم‌الزاویه رسم کنید که اضلاع آن 3cm ، 4cm و 5cm باشد؛ سپس مجموع زاویه‌های خارجی آن را پیدا نمایید.

4- با چند مثال نشان دهید که مجموع زاویه‌های خارجی مثلث‌ها برابر و ثابت اند.

5- مجموع زاویه‌های خارجی در یک مثلث، چند برابر مجموع زاویه‌های داخلی آن می‌باشد؟

رابطه بین اضلاع یک مثلث

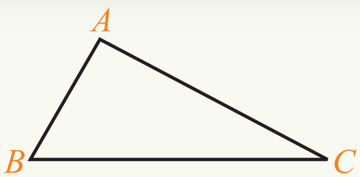


آیا مثلثی وجود دارد که مجموع دو ضلع آن از ضلع سوم کوچک‌تر باشد؟

فعالیت

- یک قطعه‌خط به طول 7cm رسم کرده، آن را $\overline{AB}$ بنامید.
- از نقطهٔ A یک دایره به شعاع 4cm و از نقطهٔ B دایره‌یی به شعاع 5cm رسم کنید.
- محل تقاطع دو دایره را C بنامید و آن را به A و B وصل کنید.
- مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ را در نظر گرفته و بگویید طول $\overline{AC}$ و طول $\overline{BC}$ چند است؟
- این بار از نقطهٔ A یک دایره‌یی به شعاع 4cm و از نقطهٔ B دایره‌یی به شعاع 2cm رسم کنید.
- آیا این دو دایره یک دیگر را قطع می کنند و مثلث تشکیل می‌شود؟
- اگر از A دایره‌یی به شعاع 4cm و از B دایره‌یی به شعاع 3cm رسم کنیم، آیا دایره‌ها همدیگر را قطع می کنند؟
- چه تفاوتی میان سه حالت بالا وجود دارد که در یک حالت توانستیم مثلث تشکیل دهیم، و در دو حالت دیگر نتوانستیم مثلث را تشکیل دهیم؟

در فعالیت بالا دیدیم که برای تشکیل یک مثلث مجموع دو ضلع یک مثلث باید از ضلع سوم بزرگ‌تر باشد؛ یعنی در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ باید مجموع اندازهٔ اضلاع $\overline{AC}$ و $\overline{BC}$ از اندازهٔ AB بزرگ‌تر باشد.



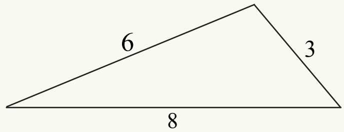
مثال اول: مثلثی رسم کنید که اضلاع آن 3cm، 6cm و 8cm باشد؟

حل: باید ببینیم که آیا رابطهٔ اضلاع مثلث برای تمام اضلاع برقرار است یا خیر؟

$3+6=9 \quad , \quad 9>8$

$3+8=11 \quad , \quad 11>6$

$6+8=14 \quad , \quad 14>3$



پس می‌توان این مثلث را رسم کرد. شکل بالا را مشاهده کنید.

مثال دوم: آیا می‌توانید مثلثی رسم کنید که اضلاع آن 3cm، 6cm و 2cm باشد؟

حل:

$3+6=9 \quad , \quad 9>2$

$2+6=8 \quad , \quad 8>3$

$3+2=5 \quad , \quad 5<6$

برای این که بتوانیم یک مثلث را رسم کنیم باید هر سه شرط برقرار باشد؛ یعنی: مجموع طول دو ضلع باید از طول ضلع سوم بزرگ‌تر باشد و چون در این جا $3+2=5<6$ است، مثلث تشکیل نمی‌شود.

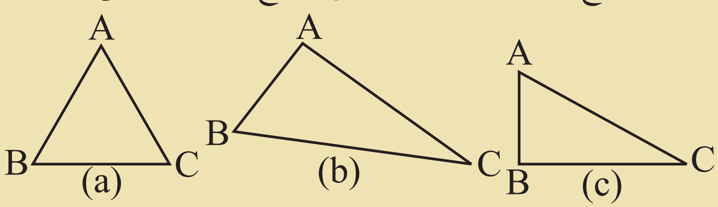
اگر مجموع طول دو ضلع از ضلع سوم کوچک‌تر باشد، مثلث تشکیل نمی‌شود.

تمرین

1- آیا می‌توان مثلثی رسم کرد که دو ضلع آن 5cm و 7cm و ضلع سوم آن به اندازهٔ نصف مجموع دو ضلع دیگر آن باشد.

2- چرا با سه قطعهٔ خطی که یک قطعه‌خط از مجموع دو قطعه‌خط دیگر بزرگ‌تر باشد، نمی‌توان یک مثلث را رسم کرد؟

3- با اندازه گیری اضلاع مثلث‌های زیر، رابطه بین اضلاع مثلث را بررسی کنید.



4- یک مثلث قایم‌الزاویه رسم کنید که اضلاع زاویهٔ قایم آن 5cm و 3cm و طول وتر آن 7cm باشد؟

5- آیا می‌توانید یک مثلث متساوی‌الساقین رسم کنید که طول قاعدهٔ آن سه برابر یکی از ساق‌های آن باشد؟

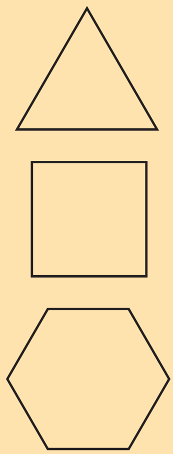
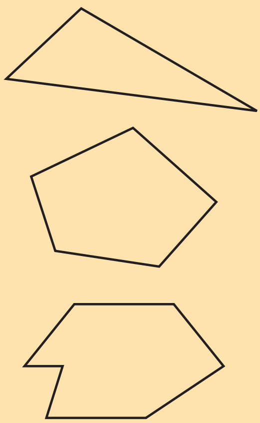
چندضلعی‌ها (مضلع‌ها)

در تصویر مقابل، چند نوع چندضلعی را مشاهده می‌کنید؟



فعالیت

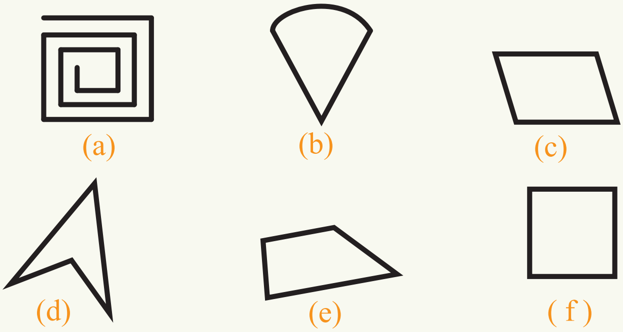
- به جدول زیر نگاه کرده، شکل‌های داخل ستون‌ها را با هم مقایسه کنید.

چند ضلعی منظم	چند ضلعی است	چند ضلعی نیست
		

- شکل‌های ستون اول و دوم را از چپ به راست با هم مقایسه کنید.
- در چه صورت یک شکل را چندضلعی می‌نامیم و در چه صورتی، یک شکل چندضلعی نیست؟
- زاویه‌های یک چندضلعی منظم را اندازه بگیرید و بگویید که با هم چه رابطه یی دارند؟ آیا این خصوصیات در تمام چندضلعی‌ها وجود دارند؟

در فعالیت آغاز این درس دیده می‌شود که یک چندضلعی عبارت از خط منکسر بسته‌یی است که فقط یک ناحیهٔ بسته را در بر دارد.
اگر اندازهٔ زاویه‌ها و اضلاع یک چندضلعی با هم مساوی باشند، چندضلعی منظم نامیده می‌شود و چندضلعی‌یی که اضلاع و زوایای آن مساوی نباشند، به نام چندضلعی غیر منظم یاد می گردد.

مثال: کدام یک از شکل‌های زیر یک چندضلعی است؟



حل:

شکل a یک شکل بسته نیست؛ پس یک چندضلعی نیست.
شکل b خط منکسر بسته نیست؛ پس یک چندضلعی نیست.
شکل c خط منکسر بسته است؛ پس یک چندضلعی است.
شکل d خط منکسر بسته است؛ پس یک چندضلعی می‌باشد.
شکل e خط منکسر بسته است؛ پس چندضلعی است.
شکل f خط منکسر بسته است و در میان تمام اشکال بالا یگانه شکلی است که اضلاع آن با هم مساوی اند، بنابر این یک چندضلعی منظم است؛ سایر چند ضلعی های بالا به نام چندضلعی غیر منظم یاد می‌شوند که از تقاطع چند خط تشکیل شده اند.

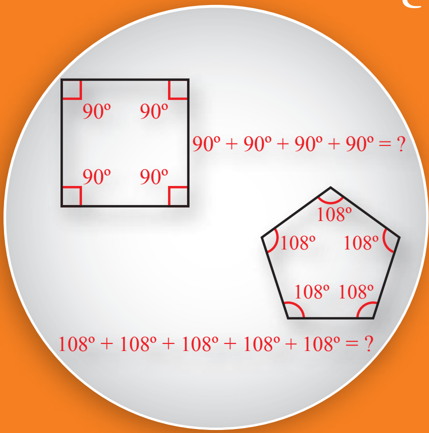
چندضلعی ها، ناحیه‌های بسته یی اند که از تقاطع چند قطعه‌خط تشکیل می‌شوند و هیچ یک از دو خط آن در امتداد یک خط مستقیم قرار ندارد؛ همچنان هر رأس مضلع فقط و فقط نقطهٔ تقاطع دو قطعه‌خط است.

تمرین

1- چند ضلعی هایی را که می‌شناسید، نام ببرید.
2- در میان چند ضلعی‌هایی که می‌شناسید، کدام‌های شان چند ضلعی منظم اند؟
3- آیا مستطیل، ذوزنقه و معین چندضلعی‌های منظم استند چرا؟
4- آیا یک مثلث قایم الزاویهٔ متساوی‌الساقین یک چندضلعی منظم است؟ چرا ؟
5- آیا یک مثلث متساوی‌الاضلاع ، یک چندضلعی منظم است؟ چرا؟
6- اگر سه شکل مستطیل، دایره و مربع را در نظر بگیریم، کدام یک آن‌ها، چندضلعی نیست و کدام یک چندضلعی منظم و کدام یک چندضلعی غیر منظم است؟

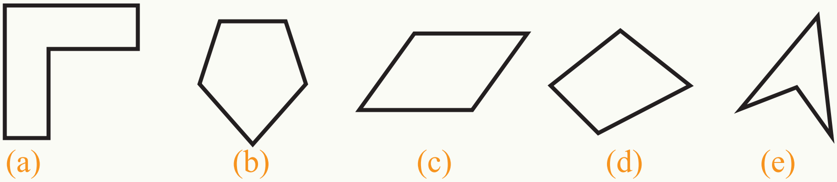
مجموع زاویه‌های داخلی یک مضلع

در هر یک از مضلع‌های مقابل مجموع زوایای داخلی آن چند درجه است؟



فعالیت

- در اشکال زیر هر ضلع را امتداد دهید.



- شکل‌های (e) و (a) چه فرقی با شکل‌های (b)، (d) و (c) دارند؟

از فعالیت بالا نتیجه می گیریم که در بعضی از چند ضلعی ها، امتداد برخی اضلاع از داخل چند ضلعی عبور می کند که آن‌ها را چند ضلعی مقعر می گویند و چند ضلعی‌یی که امتداد اضلاع آن از بین چند ضلعی عبور نمی کند، آن را چندضلعی محدب می‌نامند. ناگفته نماند که اگر در چندضلعی‌ها نام مقعر یا محدب ذکر نگردد، منظور چند ضلعی محدب است.

فعالیت

- چهار ضلعی ABCD را در نظر بگیرید.
- زاویه‌های داخلی این چهار ضلعی را با نقاله اندازه گرفته و با هم جمع کنید.
- یک قطر چهار ضلعی را رسم کنید. این قطر، چهارضلعی را به چند مثلث تقسیم می کند؟
- مجموع زاویه‌های داخلی را بدون استفاده از نقاله پیدا کنید.
- اگر به جای آن قطر، یک قطر دیگر از این چهارضلعی را رسم می‌کردید، آیا نتیجه متفاوت می‌بود؟

- یک پنج‌ضلعی رسم کنید. دو قطر کیفی این پنج‌ضلعی را از یک رأس رسم کنید و مجموع زاویه‌های داخلی پنج ضلعی را پیدا کنید.
- یک شش ضلعی رسم کنید و بگویید که چند قطر باید رسم شود تا مجموع زاویه‌های داخلی شش ضلعی به دست آید.
- جدول مقابل را در کتابچه‌های خود نوشته و آن را تکمیل کنید. در هر ردیف چه عددی در 180 ضرب می‌شود، این عدد چه رابطه یی با تعداد اضلاع چندضلعی دارد؟
- آیا حدس زده می‌توانید که مجموع زوایای داخلی هشت ضلعی چند درجه است؟
- مجموع زوایای داخلی n ضلعی چقدر است؟

تعداد اضلاع	مجموع زوایای داخلی
3	$1\times180^{\circ}$
4	$2\times180^{\circ}$
5	$3\times180^{\circ}$
6	$4\times180^{\circ}$
.	.
.	.
.	.

از فعالیت بالا معلوم گردید که $S=(n-2)\times180^{\circ}$ می‌باشد در اینجا S مجموع زوایای داخلی و n تعداد اضلاع چندضلعی را نشان می‌دهد.

مثال: مجموع زاویه‌های داخلی یک 10 ضلعی چند درجه است؟ همچنان معلوم کنید که چند برابر یک زاویهٔ قایمه می‌شود؟

حل:

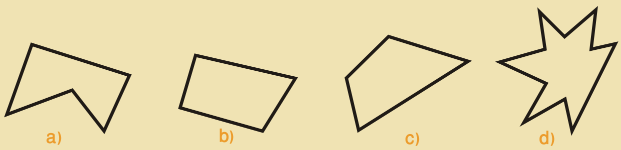
$$S=(n-2)\times180^{\circ}=(10-2)\times180^{\circ}=8\times180^{\circ}=1440^{\circ}$$

که 16 برابر یک زاویهٔ قایمه است.

مجموع زاویه‌های داخلی یک چند ضلعی مربوط به تعداد اضلاع آن است.

تمرین

1- در اشکال زیر، چند ضلعی محدب و چند ضلعی مقعر را نشان دهید.

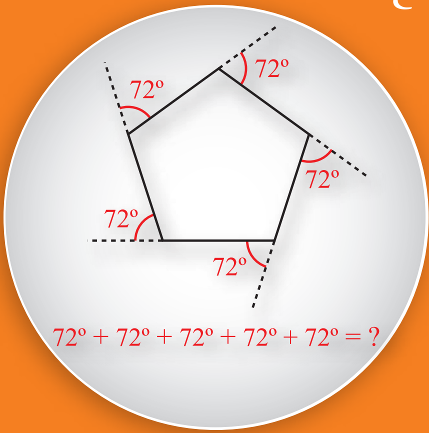


2- مجموع زوایای داخلی یک 12 ضلعی را دریابید.

3- مجموع زوایای داخلی یک 8 ضلعی چند برابر یک زاویهٔ قایمه می‌شود؟

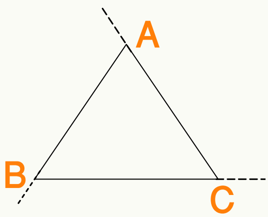
4- مجموع زوایای داخلی یک مثلث، یک مربع، یک مستطیل و یک 20 ضلعی را از روی فورمول بالا دریابید.

مجموع زاویه‌های خارجی یک مضلع



آیا می‌توانید بگویید که مجموع زوایای خارجی یک چندضلعی چند درجه است؟

فعالیت

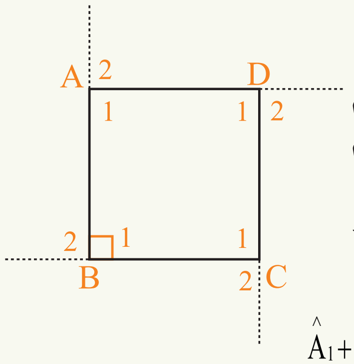


- مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ را در نظر بگیرید.
- ضلع $\overline{AB}$ را از A به طرف B امتداد دهید.
- ضلع $\overline{BC}$ را از B به طرف C امتداد دهید.
- ضلع $\overline{AC}$ را از C به طرف A امتداد دهید.
- سه زاویهٔ خارجی این مثلث را مشخص و نامگذاری کنید.
- جدول زیر را در کتابچه‌های خود نوشته و آن را تکمیل کنید.

مجموع زاویه‌های داخلی و خارجی	مجموع زاویه‌های خارجی	مجموع زاویه‌های داخلی	چند ضلعی‌ها
? = ... + ...	....	? = 180° ×	سه ضلعی
? = ... + ...	....	? = 180° ×	چهار ضلعی
? = ... + ...	....	? = 180° ×	پنج ضلعی
? = ... + ...	....	? = 180° ×	شش ضلعی
...	...	...	...

- یک چهار ضلعی رسم کرده و زاویه‌های خارجی آن را نشان دهید.
- یک پنج ضلعی رسم کرده و زاویه‌های خارجی آن را نشان دهید.

فعالیت بالا نشان می‌دهد که: مجموع زاویه‌های خارجی در یک چندضلعی 360° بوده و به تعداد اضلاع ارتباط ندارد.



مثال اول: مجموع زوایای خارجی یک مربع را اولاً از روی رسم پیدا نمایید و سپس آن را از روی فورمول دریافت کرده و با هم مقایسه کنید.

حل: همان طوری که می‌دانیم مجموع زوایا به یک طرف خط مستقیم 180° است؛ پس:

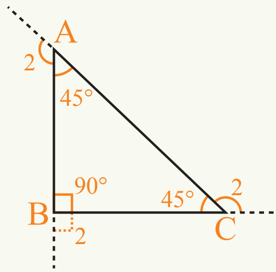
$$\hat{A}_1+\hat{A}_2=90^\circ+90^\circ=180^\circ \qquad \hat{B}_1+\hat{B}_2=90^\circ+90^\circ=180^\circ$$

$$\hat{C}_1+\hat{C}_2=90^\circ+90^\circ=180^\circ \qquad \hat{D}_1+\hat{D}_2=90^\circ+90^\circ=180^\circ$$

پس مجموعهٔ زوایای خارجی مربع مساوی است به: $\hat{A}_2+\hat{B}_2+\hat{C}_2+\hat{D}_2=90^\circ+90^\circ+90^\circ+90^\circ=360^\circ$

مثال دوم: مجموع زاویه‌های خارجی یک مثلث قایم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین را دریابید.

حل: مثلث قایم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین $\overset{\Delta}{ABC}$ را رسم نموده و اضلاع آن را تا آنجا امتداد دهید که زاویه‌های خارجی آن تشکیل گردد، دیده می‌شود که:



$$\hat{A}_2=180^\circ-45^\circ=135^\circ$$

$$\hat{B}_2=180^\circ-90^\circ=90^\circ$$

$$\hat{C}_2=180^\circ-45^\circ=135^\circ$$

از این رو مجموع زاویه‌های خارجی مثلث برابر است به:

$$\hat{A}_2+\hat{B}_2+\hat{C}_2=135^\circ+90^\circ+135^\circ=360^\circ$$

مجموع زاویه‌های خارجی هر مضلع (چند ضلعی) 360° است و به تعداد اضلاع آن ارتباط ندارد.

تمرین

1- مجموع زاویه‌های خارجی یک مثلث متساوی‌الاضلاع را دریابید.

2- اگر در یک مثلث متساوی‌الساقین، زاویه بین دو ساق 80° باشد، مجموع زاویه‌های خارجی آن را پیدا کنید.

3- مجموع زاویه‌های خارجی یک 10 ضلعی منظم را پیدا کنید.

4- هر یک از زاویه‌های خارجی یک مستطیل چند درجه است؟ مجموع آن‌ها را به دست آورید.

اشکال انطباق‌پذیر

همان طور که می‌دانید اکثر قفل‌ها دارای دو یا سه کلید اند. چرا؟ این کلیدها با همدیگر چه رابطه دارند که قفل را باز می کنند، آیا در جواب‌های زیر، جواب صحیح وجود دارد؟

الف) زیرا این کلیدها دارای عین رنگ اند.

ب) زیرا دارای عین درازی اند.

پ) زیرا دارای عین دندانه ها اند.

ت) زیرا دارای عین ضخامت اند.

ج) ب، پ و ت درست اند.



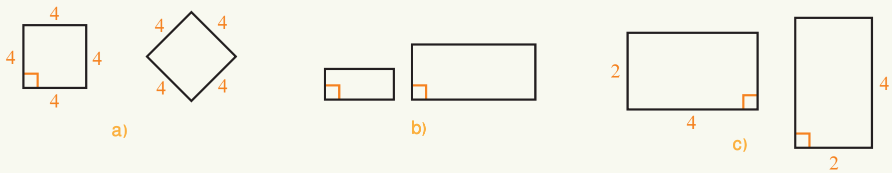
فعالیت

- یک مربع روی کاغذ رسم نموده که هر ضلع آن 4cm باشد. نام آن را (الف) بگذارید.
- یک مربع دیگر روی کاغذ رسم کنید که هر ضلع آن 6cm باشد. نام آن را (ب) بگذارید.
- یک مربع دیگر نیز روی کاغذ رسم کنید که هر ضلع آن 4cm باشد. نام آن را (پ) بگذارید.
- این مربع ها را قیچی کرده و دو به دو بالای همدیگر گذاشته و با هم مقایسه کنید.

برای نمایش انطباق‌پذیری دو شکل از علامت ($\cong$) استفاده می شود.

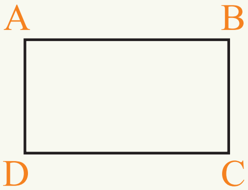
مثال اول: دراشکال زیر اشکالی را که با هم انطباق‌پذیر اند، مشخص کنید.(اعداد مربوطه، اندازۀ طول را به سانتی متر نشان می‌دهند.)

حل: جوره های اشکال(a) و (c) با هم انطباق‌پذیر اند؛ اما اشکال (b) با هم انطباق‌پذیر نیستند.

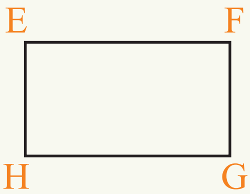


مثال دوم: یک مستطیل کیفی رسم کنید و سپس بگویید چگونه می توان یک مستطیل دیگری که با مستطیل اولی انطباق‌پذیر باشد رسم کرد؟

حل: این کار را به دو روش انجام می‌دهیم.



1- مستطیل کیفی ABCD را به رنگ روشن رسم کرده؛ سپس یک ورق کاغذ شفاف را بالای شکل اولی قرار می‌دهیم و از روی آن، شکل مستطیل را رسم می‌کنیم. حالا این دو شکل با هم انطباق‌پذیر اند.



2- چون می‌دانیم که زاویه‌های مستطیل هر کدام 90° است، زاویهٔ قایمهٔ E را رسم کرده و به اندازهٔ دو ضلع مجاور مستطیل اولی، به طور مثال از اضلاع $\overline{AB}$ و $\overline{AD}$ عمودهای جدید جدا نموده و اضلاع $\overline{EF}$ و $\overline{EH}$ را به دست می‌آوریم؛ بعد از نقاط F و H توسط پرکار به اندازهٔ اضلاع اولی $\overline{BC}$ و $\overline{DC}$ اضلاع $\overline{FG}$ و $\overline{HG}$ را رسم می‌کنیم.

اکنون مستطیل دومی EFGH با مستطیل ABCD انطباق‌پذیر است.

دو شکلی که کاملاً بر هم منطبق می‌باشند، یعنی یکدیگر را می‌پوشانند، اشکال انطباق‌پذیر نامیده می‌شوند.

تمرین

1- دو مربع که با هم انطباق‌پذیر باشند رسم کنید.
2- دو لوزی داده شده است، چطور بدانیم که با هم انطباق‌پذیراند؟
3- دو مثلث انطباق‌پذیر را رسم کنید.
4- یک دایره به شعاع 4cm رسم کرده؛ سپس یک دایرهٔ دیگر ترسیم کنید که با دایرهٔ اولی انطباق‌پذیر باشد.

انطباق‌پذیری دو مثلث در حالتی که دو ضلع و زاویهٔ بین آن‌ها مساوی باشد

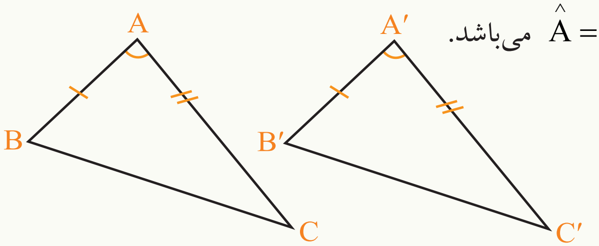


برای آن که ببینیم آیا دو باغچه در شکل انطباق‌پذیر استند یا خیر، آیا می‌توانیم یکی از آن شکل‌ها را بلند کنیم روی دیگری قرار دهیم؟

فعالیت

- در دو مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ شکل زیر:

$\overline{AB}=\overline{A'B'}$ ، $\overline{AC}=\overline{A'C'}$ و $\hat{A}=\hat{A'}$ می‌باشد.

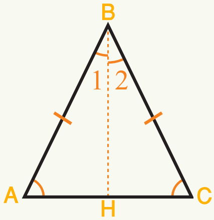


- یک کاغذ نازک برداشته، روی مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ قرار دهید و از روی مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ آن را قطع کنید و آن را $A''B''C''$ بنامید.
- رأس A' را روی A'' قرار دهید.
- آیا دو ضلع $A'B'$ روی $A''B''$ و $A'C'$ روی $A''C''$ قرار می‌گیرند؟ چرا؟
- آیا رأس B' روی B'' و C' روی C'' قرار می‌گیرد؟ چرا؟
- دو مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ چه رابطه‌یی با هم دارند؟
- دو مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{A''B''C''}$ چه رابطه‌یی با هم دارند؟ چرا؟
- دو مثلث $A'B'C'$ و $\overset{\Delta}{A''B''C''}$ چه رابطه‌یی با هم دارند؟ چرا؟

از فعالیت بالا می‌توان چنین نتیجه گرفت:

اگر دو ضلع و زاویهٔ بین این دو ضلع یک مثلث، با دو ضلع و زاویهٔ بین آن دو ضلع مثلث دیگر مساوی باشند این دو مثلث با هم انطباق‌پذیر اند.

مثال:
در شکل زیر $\overline{AB}=\overline{BC}$ و $\overline{BH}$ ناصف‌الزاویهٔ $\overset{\Delta}{ABC}$ است، ثابت کنید که دو مثلث $ABH \cong HBC$



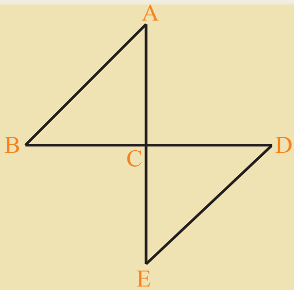
حل: در مثلث‌های $\overset{\Delta}{ABH}$ و $\overset{\Delta}{BCH}$: $\hat{B}_1=\hat{B}_2$ زیرا زاویهٔ B نصف گردیده است.

اضلاع $BA=BC$ که مثال داده شده است و

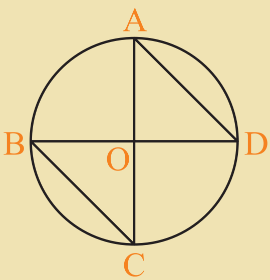
$BH=BH$ (ضلع مشترک)

از اینجا معلوم می‌شود که در دو مثلث $\overset{\Delta}{ABH}$ و $\overset{\Delta}{BCH}$ که دو ضلع و زاویهٔ بین آن‌ها با هم مساوی اند با هم انطباق‌پذیر می‌باشند.

تمرین



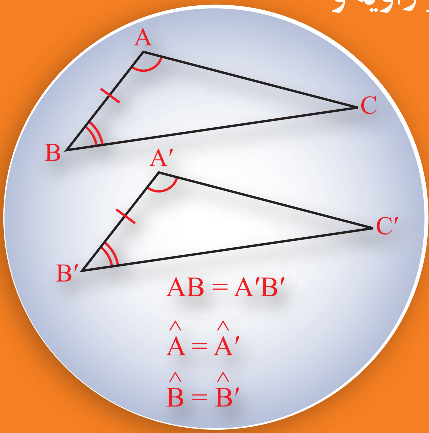
1- درشکل مقابل $\overline{AE}=\overline{BD}$ است و همدیگر را در نقطهٔ تنصیف (C) قطع می کنند و نیز دو خط $\overline{AE}$ و $\overline{BD}$ بر همدیگر عمود اند. ثابت کنید که $\overset{\Delta}{ABC}\cong\overset{\Delta}{CDE}$.



2- اگر دو قطر دایره با همدیگر عمود باشند و نقاط تقاطع این دو قطر با محیط دایره را قرار شکل به هم وصل کنیم، آیا دو مثلث $\overset{\Delta}{AOD}$ و $\overset{\Delta}{BOC}$ با هم انطباق‌پذیر اند؟

3- یک زمین مستطیل شکل را چگونه به دو مثلث انطباق‌پذیر تقسیم می کنید؟

انطباق‌پذیری دو مثلث از حیث دو زاویه و ضلع بین شان



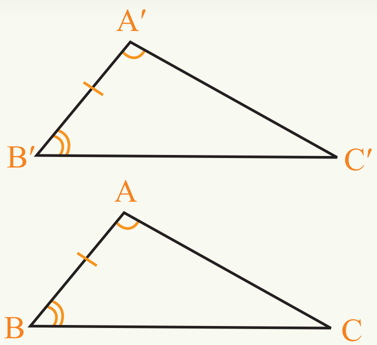
اگر در دو مثلث دو زاویه و ضلع بین آن‌ها با هم مساوی باشند، چگونه می‌توانیم ثابت کنیم که این دو مثلث، انطباق‌پذیر اند؟

فعالیت

- مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ را که در آن ضلع $BC = 4\ cm$ ، $\hat{B} = 60^\circ$ و زاویهٔ $\hat{C} = 80^\circ$ است رسم کنید.
- مثلث $\underset{\Delta}{A'B'C'}$ را که در آن $B'C' = 4\ cm$ و $\hat{B}' = 60^\circ$ و $\hat{C}' = 80^\circ$ باشد، رسم کنید.
- یک کاغذ شفاف روی مثلث $\underset{\Delta}{ABC}$ بگذارید و از کناره‌های مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ آن را ببرید. این مثلث را $\underset{\Delta}{A''B''C''}$ بنامید.
- رأس B'' را روی B' بگذارید. آیا C'' روی C' قرار می گیرد؟ چرا؟
- آیا ضلع $\overline{A''B''}$ بر $\overline{A'B'}$ منطبق می‌شود؟ چرا؟
- آیا ضلع $\overline{A''C''}$ بر $\overline{A'C'}$ منطبق می‌شود؟ چرا؟

از فعالیت بالا نتیجه می‌شود که:

اگر دو زاویه و ضلع بین آن‌ها درمثلثی با دو زاویه و ضلع بین آن‌ها در مثلث دیگر مساوی باشند، دو مثلث انطباق‌پذیر اند.

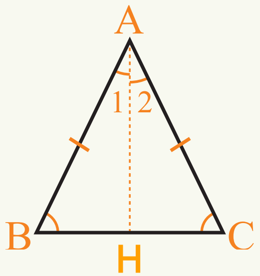


چنانکه در شکل مقابل، داریم:

$$AB = A'B' \ , \ \hat{A} = \hat{A}' \ , \ \hat{B} = \hat{B}'$$

بنابراین مثلث ABC و A′B′C′ انطباق‌پذیر اند.

مثال اول: در مثلث متساوی‌الساقین $\overset{\Delta}{ABC}$، قطعه‌خط $\overline{AH}$ ناصف‌الزاویه بر قاعده $\overline{BC}$ عمود است. ثابت کنید که مثلث‌های $\overset{\Delta}{ABH}$ و $\overset{\Delta}{ACH}$ با هم انطباق‌پذیر اند.



حل: در دو مثلث ABH و ACH داریم که:

چون زاویهٔ A نصف شده است.................... $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$

مثلث متساوی‌الساقین است......................... $\hat{B} = \hat{C}$

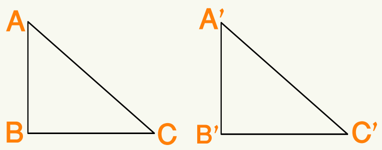
ساق‌های متساوی‌الساقین اند.................... $AB = AC$

قرار فعالیت بالا در دو مثلث ABH و ACH داریم که دو زاویه و یک ضلع در هر دو مثلث با هم مساوی اند لذا:

$$\overset{\Delta}{ABH} \cong \overset{\Delta}{ACH}$$

مثال دوم: چرا دو مثلث قایم‌الزاویهٔ متساوی الساقین که ساق‌های شان با هم مساوی اند، با هم انطباق‌پذیر اند؟

حل: در دو مثلث ABC و $A'B'C'$ که مثلث‌های قایم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین اند داریم که:



قرار قایمه. $\hat{B} = \hat{B'}$

در مثال داده شده است....... $AB = A'B'$

ساق‌های متساوی‌الساقین....... $BC = B'C'$

چون در دو مثلث ABC و $A'B'C'$ دو ضلع و زاویهٔ بین آن‌ها با هم مساوی اند.

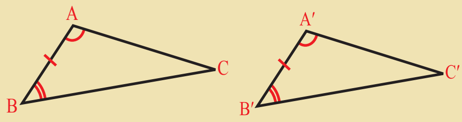
$$\overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

اگر در دو مثلث، دو زاویه و ضلع بین آن‌ها با هم مساوی باشند، این دو مثلث با هم انطباق‌پذیر اند.

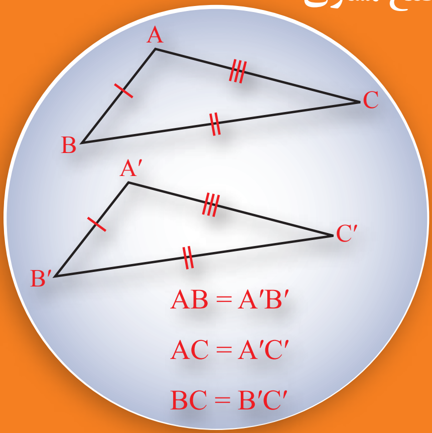
تمرین

1- دو مثلث متساوی‌الساقین قایم الزاویه باید کدام شرط دیگر را داشته باشند تا بر هم منطبق گردند؟

2- در این دو مثلث مختلف‌الاضلاع اگر $\hat{B} = \hat{B'}$, $\hat{A} = \hat{A'}$ و $AB = A'B'$ است؛ آیا این دو مثلث با هم انطباق‌پذیر استند چرا؟



انطباق‌پذیری دو مثلث از حیث سه ضلع مساوی



اگر سه ضلع یک مثلث با سه ضلع مثلث دیگر مساوی باشند، این دو مثلث با همدیگر چه رابطه‌یی دارند؟

فعالیت

- دو قطعه‌خط $\overline{A'B'} = \overline{AB} = 5cm$ را رسم کنید.
- روی این دو قطعه‌خط دو مثلث بسازید طوری که:

$\overline{AC} = \overline{A'C'} = 7cm$

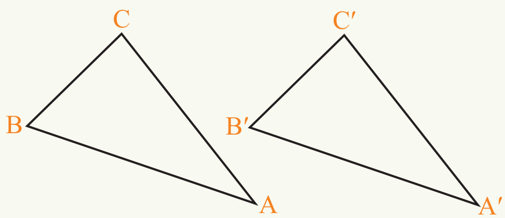
و $\overline{BC} = \overline{B'C'} = 4cm$

- یک کاغذ شفاف روی $\overset{\Delta}{ABC}$ قرار داده و مثلث $A''B''C''$ را ببرید.
- این مثلث $A''B''C''$ را روی مثلث $A'B'C'$ قرار بدهید، چه اتفاقی می‌افتد؟

در فعالیت بالا می‌بینیم که:

اگر سه ضلع یک مثلث با سه ضلع مثلث دیگر برابر باشند، این دو مثلث با هم انطباق‌پذیر اند.

به طور مثال در دو مثلث زیر داریم که:



$\overline{AB} = \overline{A'B'}$

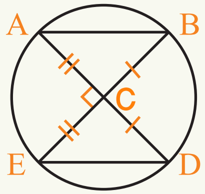
$\overline{AC} = \overline{A'C'}$

$\overline{BC} = \overline{B'C'}$

چون سه ضلع این دو مثلث با هم مساوی اند، این دو مثلث با هم انطباق‌پذیر می‌باشند، یعنی:

$$\overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

مثال اول: در دو مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ و ECD، اگر AB = ED باشد، آیا این دو مثلث با هم انطباق‌پذیر استند؟ AD و EB قطرهای دایره اند.



حل:

$\overline{AC} = \overline{CE}$ شعاع دایره

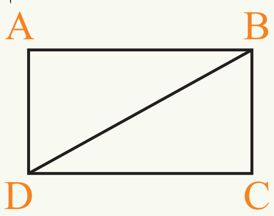
$\overline{BC} = \overline{CD}$ شعاع دایره

$\overline{AB} = \overline{ED}$ قرار مفروض

چون در دو مثلث بالا سه ضلع آن‌ها با هم مساوی اند؛

لذا: $\overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{ECD}$

مثال دوم: اگر یک قطر مستطیل را رسم کنیم، آیا مستطیل به دو مثلث مساوی تقسیم می‌شود؟ چرا؟



حل: مستطیل و یک قطر آن را رسم می کنیم.

دیده می‌شود که:

$\overline{AB} = \overline{CD}$

$\overline{AD} = \overline{BC}$

$\overline{BD} = \overline{BD}$

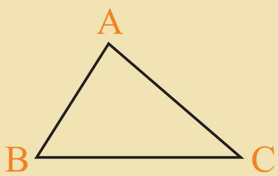
چون در دو مثلث ABD و BCD سه ضلع با هم مساوی اند، با هم انطباق‌پذیر می‌باشند. قطر، مستطیل را به دو حصهٔ مساوی تقسیم می کند.

اگر سه ضلع یک مثلث با سه ضلع مثلثی دیگر مساوی باشند، این دو مثلث با هم انطباق‌پذیر اند.

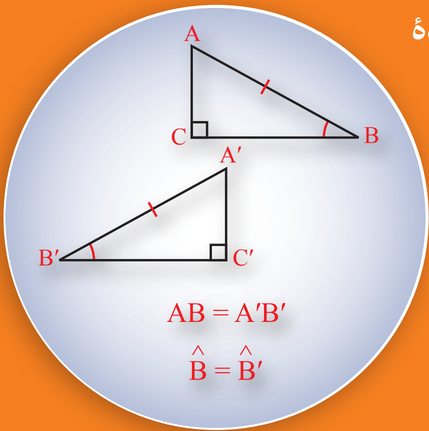
تمرین

1- یک مثلث دارای اضلاع 5Cm، 7Cm و 3cm است. یک مثلث دیگر که مجموع دو ضلع آن 10cm است، ضلع سومش چند سانتی متر باید باشد تا با مثلث اولی انطباق‌پذیر گردد؟

2- مثلث ABC قرار شکل مقابل داده شده است، یک مثلث دیگر که با مثلث داده شده انطباق‌پذیر باشد رسم کنید.



حالت انطباق‌پذیری دو مثلث قایم‌الزاویه که وتر و یک زاویهٔ حادهٔ آن‌ها با هم مساوی باشند.



علاوه بر سه حالتی که در مورد انطباق‌پذیری دو مثلث مطالعه کردید، آیا در مورد مثلث قایم‌الزاویه حالت دیگری وجود دارد؟

فعالیت

- یک قطعه‌خط AB را به طول 5cm رسم کنید.
- در نقطهٔ B ضلع AB ، یک زاویه 40° را رسم کنید که یک ضلع آن AB و ضلع دیگر آن BC باشد.
- از نقطهٔ A بر ضلع BC عمود رسم کنید.
- چه نوع مثلثی ایجاد می‌شود؟
- یک مثلث دیگر با همین شرایط رسم نموده و آن را $A'B'C'$ بنامید.
- یک کاغذ نازک روی مثلث $A'B'C'$ قرار دهید و مثلث $A''B''C''$ را بسازید.
- A'' را روی A' قرار دهید. آیا B'' روی B' قرار می گیرد؛ چرا؟
- آیا $\overline{B''C''}$ روی $\overline{B'C'}$ قرار می گیرد؟ چرا؟
- آیا دو مثلث ABC و $A'B'C'$ با هم انطباق‌پذیر اند؟

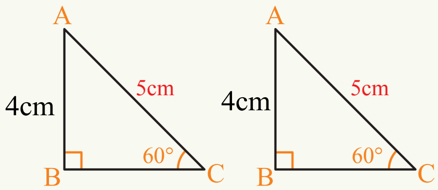
از فعالیت فوق نتیجه می‌شود که:

هر گاه وتر و یک زاویهٔ حادهٔ یک مثلث قایم الزاویه، با وتر و یک زاویهٔ حادهٔ مثلث قایم‌الزاویهٔ دیگر برابر باشند، این دو مثلث با هم انطباق‌پذیر اند.

مثال اول: دو مثلث قایم‌الزاویه که وتر آن‌ها 5cm و یک زاویهٔ حادهٔ آن‌ها 60° باشد، رسم کنید.

آیا این دو مثلث انطباق‌پذیر اند؟

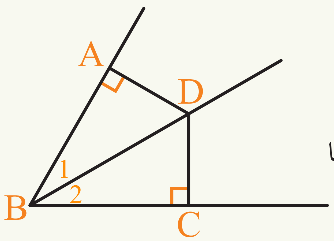
حل: اول زاویهٔ 60° را رسم می‌کنیم و بعد یک ضلع آن را به اندازهٔ 5cm جدا کرده از انجام این ضلع، یک عمود بالای ضلع دیگر رسم می کنیم.



به همین ترتیب، مثلث دوم را رسم می کنیم؛
چون وتر و یک زاویهٔ حادهٔ این دو مثلث قایم‌الزاویه با هم مساوی اند:
این دو مثلث با هم انطباق‌پذیر می‌باشند.

مثال دوم: از یک نقطهٔ ناصف‌الزاویه دو خط عمود بالای دو ضلع این زاویه رسم می کنیم، اکنون چگونه ثابت کنیم که دو مثلث تشکیل شده با هم انطباق‌پذیر اند؟

حل: زاویهٔ B و ناصف‌الزاویهٔ آن را قرار زیر ترسیم کرده و دو مثلث را قرار شکل زیر تشکیل می‌دهیم. در دو مثلث قایم‌الزاویهٔ ABD و DBC داریم که:



قرار ناصف‌الزاویه $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$
قرار ضلع مشترک $\overline{BD} = \overline{BD}$

چون در دو مثلث قایم الزاویه وتر و یک زاویهٔ حادهٔ آن‌ها با هم مساوی اند.
این دو مثلث انطباق‌پذیر اند.

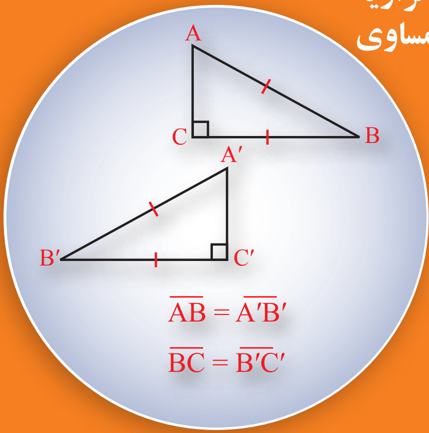
برای انطباق‌پذیری مثلث‌های قایم‌الزاویه، مساوی بودن یک زاویهٔ حاده و وتر کفایت می کند.

تمرین

1- دو مثلث قایم‌الزاویه که وتر آن‌ها 6cm و یک زاویهٔ حادهٔ آن‌ها برابر به 60° باشد را در نظر بگیرید. چگونه می توانید ثابت کنید که این دو مثلث با هم انطباق‌پذیر اند؟

2- یک قطر مربع، آن را به دو مثلث تقسیم می کند. ثابت کنید که این دو مثلث با هم انطباق‌پذیر اند؟

حالت انطباق‌پذیری دو مثلث قایم‌الزاویه که وتر و یک ضلع قایم آن‌ها مساوی باشد



آیا در مثلث قایم‌الزاویه غیر از حالت ذکر شده، حالت دیگری وجود دارد که تحت شرایط آن، دو مثلث قایم‌الزاویه با هم انطباق‌پذیر باشند؟

فعالیت

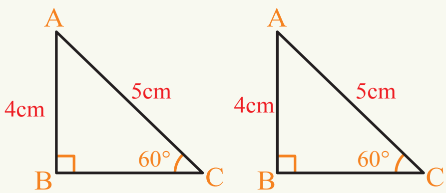
- یک زاویهٔ قایمه رسم کرده، رأس آن را A بنامید.
- روی یک ضلع این زاویه، به طول 4cm جدا نموده، آن نقطه را B بنامید.
- از نقطهٔ B به طول 5cm وتر را رسم کنید، تا ضلع دیگر زاویهٔ A را قطع کند.
- مثلث دیگری نیز با این شرایط رسم کرده، آن را $A'B'C'$ بنامید.
- یک کاغذ شفاف را روی مثلث $A'B'C'$ قراد دهید و مثلث $A''B''C''$ را که انطباق‌پذیر با مثلث $A'B'C'$ باشد، بسازید.
- رأس A'' را روی A قرار دهید. آیا B'' روی B قرار می گیرد؛ چرا؟
- آیا رأس C'' روی C قرار می گیرد؟
- آیا دو مثلث ABC و $A''B''C''$ با هم انطباق‌پذیراند؟

از فعالیت فوق نتیجه می‌شود که:

اگر وتر و یک ضلع یک مثلث قایم‌الزاویه با وتر ویک ضلع مثلث قایم‌الزاویهٔ دیگری مساوی باشند، مثلث‌ها با هم انطباق‌پذیر اند.

مثال اول: دو مثلث قایم‌الزاویه را که وتر هر یک آن‌ها 5cm و یک ضلع قایم آن‌ها 4cm باشد، چگونه رسم می کنید؟ آیا این دو مثلث با هم انطباق‌پذیر استند؟

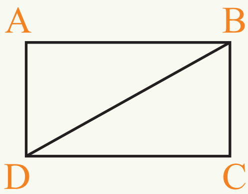
حل: اول ضلع قایم معلوم را رسم کرده، سپس در یک انجام آن زاویهٔ قایمه و از انجام دیگر این ضلع قوسی که شعاع آن به اندازهٔ وتر باشد، رسم می‌کنیم. در هر قسمتی که دایره ضلع دیگر قایم را قطع کند نقطهٔ تقاطع را به انجام ضلع قایم معلوم وصل می کنیم. به همین ترتیب،



یک مثلث قایم‌الـزاویهٔ دیگر رسم می کنیم، در این دو مثلث قایم‌الزاویه وتر ویک ضلع قایم آن‌ها با هم مساوی اند؛ بنابراین: این دو مثلث قایم‌الزاویه با هم انطباق‌پذیراند.

مثال دوم: در شکل زیر قطر مستطیل را رسم کرده و ثابت کنید که دو مثلث ABD و CBD انطباق پذیراند؟

حل: قرار شکل زیر مستطیلی داریم که:
$AB = DC$ و $BD = BD$ می‌باشد.



چون در دو مثلـث قایم‌الـزاویهٔ ABD و DBC وتر و یک ضلع قایـم با هم مسـاوی اند؛ پس هـر دو مثلث انطباق‌پذیر می‌باشـند همچنین می توان انطباق پذیری دو مثلث را از حیث دو ضلع و زاویهٔ بین آن ها بررسی کرد:

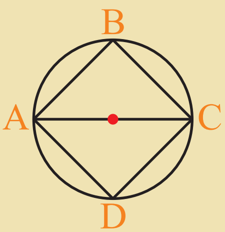
$$\overline{AB} = \overline{DC}$$
$$\overline{AD} = \overline{BC}$$ (دو ضلع و زاویهٔ بین آن‌ها مساوی اند)
$$\hat{A} = \hat{C}$$

چون: $\overset{\Delta}{ABD} \cong \overset{\Delta}{DBC}$

نتیجه گرفته می‌شود که:
در مثلث‌های قایم‌الزاویه علاوه بر شرط‌های سه‌گانه، دو حالت دیگر نیز وجود دارد:

1- اگر وتر و یک زاویهٔ حادهٔ یک مثلث قایم‌الزاویه با وتر و یک زاویهٔ حادهٔ مثلث قایم‌الزاویهٔ دیگر مساوی باشند، این دو مثلث با هم انطباق‌پذیر اند.
2- اگر وتر و یک ضلع قایم یک مثلث قایم‌الزاویه با وتر و یک ضلع قایم مثلث قایم‌الزاویهٔ دیگر مساوی باشند، این دو مثلث انطباق‌پذیر اند.

تمرین



1- در شکل زیر AC قطر دایره است؛ اگر در دو مثلث قایم‌الـزاویهٔ ABC و ADC، ضلع $BC = CD$ باشد، آیا این دو مثلث با هم انطباق‌پذیراند؟ چرا؟
2- ثابت کنید که قطر مربع، آن را به دو مثلث قایم‌الـزاویهٔ انطباق‌پذیر تقسیم می کند.

خلاصه فصل پنجم

- مثلث‌ها از نظر طول اضلاع به سه دسته تقسیم شده اند:
مثلث متساوی‌الاضلاع، مثلث متساوی‌الساقین و مثلث مختلف‌الاضلاع
- مثلث‌ها را از حیث زاویه نیز به سه دسته تقسیم کرده اند:
مثلث حاده الزاویه، مثلث قایم‌الزاویه و مثلث منفرج‌الزاویه
- در هر مثلث، ارتفاع‌ها، میانه‌ها و ناصف‌الزاویه‌ها به ترتیب همدیگر را در یک نقطه قطع می کنند.
- در هر مثلث مجموع زاویه‌های داخلی آن 180° است.
- زاویهٔ خارجی یک مثلث مساوی با مجموع دو زاویهٔ داخلی غیر مجاور این مثلث می‌باشد.
- در هر مثلث، باید طول مجموع دو ضلع از طول ضلع سوم آن بزرگ‌تر باشد.
- در مثلث متساوی‌الساقین، مقابل ساق‌های مساوی، زاویه‌های مساوی قرار دارند.
- یک چندضلعی(مضلع) عبارت از خط منکسر بسته‌یی است که فقط یک ناحیه بسته را تشکیل می‌دهد، و هیچ یک از دو خط آن در امتداد یک خط مستقیم قرار ندارد و هر رأس مضلع فقط و فقط نقطهٔ تقاطع دو قطعه‌خط می‌باشد.
- در بعضی از چندضلعی‌ها امتداد یک یا برخی اضلاع آن‌ها از داخل چندضلعی عبور کرده که آن‌ها را چندضلعی مقعر می‌نامند و چندضلعی‌یی که امتداد اضلاع آن از داخل چند ضلعی عبور نمی کنند را چندضلعی محدب می گویند.
- مجموع زاویه‌های داخلی یک n ضلعی برابر است به: $(n-2)\times180^\circ$
- مجموع زاویه‌های خارجی در یک چندضلعی 360° است و به تعداد اضلاع آن‌ها ارتباط ندارد.
- به دو شکلی که کاملاً بر هم منطبق شوند، یعنی یکدیگر را بپوشانند، اشکال انطباق‌پذیر نامیده می شود.
- اگر دو ضلع و زاویهٔ بین یک مثلث با دو ضلع و زاویهٔ بین مثلث دیگر با هم مساوی باشند، آن دو مثلث انطباق‌پذیر اند.
- اگر دو زاویه و ضلع بین این دو زاویهٔ یک مثلث با دو زاویه و ضلع بین این دو زاویهٔ یک مثلث دیگر مساوی باشند، این دو مثلث با هم انطباق‌پذیر اند.
- اگر سه ضلع یک مثلث با سه ضلع مثلث دیگر دو به دو مساوی باشند، آن دو مثلث با هم انطباق‌پذیر اند.
- اگر وتر ویک ضلع قایم یک مثلث، با وتر و یک ضلع قایم مثلث دیگر مساوی باشند و یا وتر و یک زاویهٔ حادهٔ آن‌ها دو به دو با هم مساوی باشند، آن دو مثلث انطباق‌پذیر اند.

تمرین فصل پنجم

1- در مقابل هر سؤال، چهار جواب داده شده‌اند، جواب درست را مشخص کنید.

- مجموع زوایای داخلی یک 9 ضلعی چند درجه است؟

a) 360° b) 1260°

c) 180° d) هیچکدام

- مجموع زوایای داخلی یک مضلع 1980° می‌باشد. این مضلع دارای چند ضلع است؟

a) 18 b) 13

c) 11 d) 17

- اگر سه قطعه‌خط در یک نقطه یکدیگر را قطع کنند، مجموع زوایایی که به دور نقطهٔ تقاطع تشکیل می‌شود، چند درجه است؟

a) 260° b) 180°

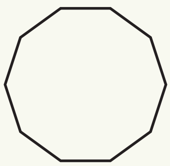
c) 360° d) هیچکدام

- اگر اندازهٔ یک زاویهٔ داخلی یک مضلع منظم 144° باشد، تعداد اضلاع آن مساوی است به:

a) 8 b) 9

c) 10 d) 12

- شکل زیر که همهٔ اضلاع و زوایای آن با هم مساوی اند به کدام نام یاد می‌شود؟



a) مضلع منظم محدب 10 ضلعی b) مضلع منظم مقعر 10 ضلعی

- اگر در یک مثلث دو ضلع آن با هم مساوی باشند، این مثلث چه نام دارد؟

a) متساوی‌الساقین
b) متساوی‌الاضلاع
c) مختلف‌الاضلاع
d) مختلف‌الزاویه

• اگر در یک مثلث دو زاویهٔ آن با هم مساوی باشند، این مثلث چه نام دارد؟
a) مثلث مختلف‌الاضلاع
b) مثلث متساوی‌الساقین
c) مثلث متساوی‌الاضلاع
d) هیچکدام

• اگر در یک مثلث قایم‌الزاویه اندازهٔ یکی از زوایای حادهٔ آن $60°$ باشد، وسعت زاویهٔ حادهٔ دیگر آن مساوی است به:
a) $30°$ b) $50°$ c) $40°$ d) $29°$

• زاویهٔ خارجی یک مثلث با مجموع زوایای غیر مجاور داخلی آن چه رابطه دارد؟
a) بزرگ‌تر است b) مساوی است c) کوچکتر است d) هیچکدام

2- مقابل جملهٔ صحیح (ص) و مقابل جملهٔ غلط (غ) بگذارید.
• ( )بزرگ‌ترین زاویهٔ خارجی‌یی که از امتداد یک ضلع یک چندضلعی منظم ساخته می‌شود $120°$ است.
• ( )مثلث می‌تواند یک مضلع مقعر باشد.
• ( )اندازهٔ یک زاویهٔ خارجی یک سه ضلعی هیچ‌گاه کمتر از یک زاویهٔ داخلی آن نمی‌باشد.
• ( )دو ضلع غیرمجاور یک مضلع در یکی از رأس‌های آن مضلع با هم متقاطع‌اند.
• ( )یک مضلع را وقتی متساوی الزوایا گویند که تمام اضلاع آن با هم مساوی باشند.
• ( )مجموع زوایای خارجی یک مضلع منظم عبارت از: $180°(n-2)$ است.
• ( )اگر تعداد اضلاع یک مضلع تزاید نمایند، مجموع زوایای خارجی آن تزاید می‌نماید.
• ( )مثلث حادالزاویه، مثلثی است که صرف دو زاویهٔ آن حاده می‌باشد.
• ( )دو مثلث وقتی انطباق‌پذیر اند که طول یک ضلع و اندازهٔ دو زاویهٔ مجاور آن‌ها یک‌به‌یک مساوی باشند.
• ( ) اگر دو ضلع یک مثلث با هم مساوی باشند، زوایای مقابل این دو ضلع نیز با هم مساوی اند.
• ( ) اندازهٔ هر یک از زوایای مثلث متساوی الاضلاع $61°$ است.
• ( ) اندازهٔ زاویهٔ خارجی یک مثلث مساوی به مجموع زوایای غیر مجاور داخلی آن می‌باشد.
• ( ) مجموع وسعت زوایای داخلی یک مثلث سه قایمه است.

3- جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید.

- اگر اندازهٔ یک زاویهٔ خارجی یک مضلع منظم دو برابر اندازهٔ زاویهٔ داخلی همجوار آن باشد مضلع مذکور .... نامیده می‌شود.
- با تزاید اضلاع یک مضلع منظم، مجموع زوایای داخلی مضلع .... و مجموع زوایای خارجی آن .... نمی‌کند.
- از یک رأس هشت ضلعی ...... قطر رسم شده می‌تواند.
- اگر اندازهٔ یک زاویهٔ خارجی یک مضلع منظم 120 درجه باشد آن مضلع دارای................ ضلع می‌باشد.
- اگر مجموع اندازهٔ زوایای داخلی یک مضلع مساوی به مجموع اندازهٔ زوایای خارجی همان مضلع باشد، مضلع مذکور دارای .... ضلع است.
- یک مثلث متساوی‌الاضلاع و یک مربع به نام .... منظم یاد می‌شود.
- خط مستقیمی که دو رأس غیر مجاور یک مضلع را با هم وصل کند،.......نامیده می‌شود.
- مثلثی که هر سه ضلع آن مساوی باشند، مثلث.........................نامیده می‌شود.
- در هر مثلث مجموع طول دو ضلع آن....................... از طول ضلع سوم آن می باشد.
- خطی که از رأس مثلث به ضلع مقابل آن عمود باشد به نام ....یاد می‌شود.
- اگر اندازهٔ زاویهٔ رأس مثلث متساوی الساقین 50° باشد، اندازهٔ هر یک از دو زاویهٔ دیگر آن .... است.

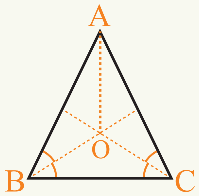
4- سؤالهای زیر را حل کنید:

- مجموع یکی از زوایای داخلی و زاویهٔ خارجی مجاور آن در یک مضلع چند درجه است؟
- اگر در مثلث‌های متساوی‌الساقین ABC و DBC قاعدهٔ BC را مشترک در نظر بگیریم، ثابت کنید که: $D\hat{B}A = A\hat{C}D$ در صورتی که رأس‌های A و D به یک طرف BC واقع نباشند.

• در مثلث متساوی الساقین $\overset{\Delta}{ABC}$ ، $AB = AC$ است؛ اگر $\hat{B}$ و $\hat{C}$ توسط OB و OC تنصیف گردند، ثابت کنید که:

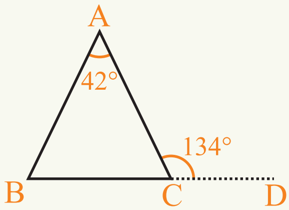
a) $OC = OB$

b) OA ناصف‌الزاویه $\hat{A}$ است.



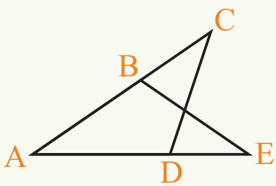
• ثابت کنید که اندازهٔ هر یک از زوایای حادهٔ یک مثلث متساوی‌الساقین قایم‌الزاویه $45°$ است.

• ضلع BC مثلث ABC قرار شکل زیرتا نقطهٔ D امتداد داده شده است، در صورتی که $\hat{BAC} = 42°$ و $\hat{DCA} = 134°$ باشد، اندازهٔ دو زاویهٔ دیگر مثلث را معلوم کنید.



• در مثلث‌های ACD و AEB قرار شکل مقابل، داریم که: $AD = AB$ و $AE = AC$. ثابت کنید که:

$\overset{\Delta}{ACD} \cong \overset{\Delta}{AEB}$



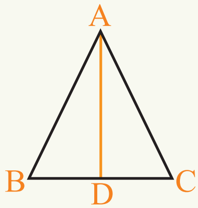
• 5 حالت انطباق‌پذیری در مثلث های قایم‌الزاویه را ذکر کنید.

• یک قطر یک معین، معین را به دو مثلث تقسیم می کند، به چند حالت ثابت کرده می توانید که این دو مثلث با هم انطباق‌پذیر اند؟

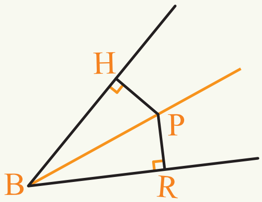
• در یک مثلث متساوی‌الساقین، میانه‌یی که از رأس به قاعده رسم می‌شود مثلث را به دو مثلث دیگر تقسیم می‌کند. آیا این دو مثلث انطباق‌پذیر اند؟ به چند حالت می‌توانید آن را ثابت کنید؟

• اگر ناصف‌الزاویهٔ یک مثلث قایم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین را از رأس قایم به قاعده رسم کنیم، مثلث قایم‌الزاویه به دو مثلث تقسیم می‌شود. آیا این دو مثلث انطباق‌پذیر اند؟ چرا؟

• در مثلث ABC، $\overline{AB} = \overline{AC}$ و $\overline{AD}$ ناصف‌الزاویهٔ رأس A است. ثابت کنید که: ارتفاع AD میانهٔ مثلث ذکر شده نیز می‌باشد.



• اگر در شکل زیر BP ناصف‌الزاویهٔ $H\hat{B}R$ باشد، ثابت کنید که: $HP = PR$





فصل ششم

خطوط موازی و عمود

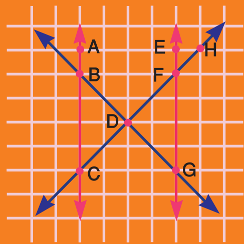


طبیعت پُر از خطوط موازی است!

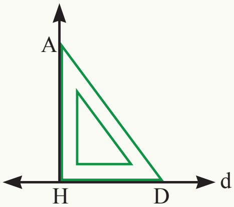
خطوط موازی و عمود (Parallel and Perpendicular Lines)



در شکل چند خط مشـــاهده می‌شود. راجع به وضعیت خطوط چه گفته می‌توانید؟



فعالیت



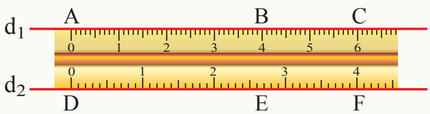
ابتدا خط مستقیم d را رسم کرده گونیا را روی خط d طوری که در شکل نشان داده شده است، می‌گذاریم. رأس گونیا را A می‌نامیم و خطوط $\overline{AH}$ و $\overline{AD}$ را رسم می‌کنیم.

- بالای خط مستقیم d از نقطهٔ A سه خط مستقیم $\overline{AE}$، $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$ را که یکی عمود و دو خط دیگر مایل باشند، رسم کنید.
- خط‌ها را با خط‌کش اندازه گرفته و تعیین کنید که کدام خط از همه کوچکتر است.

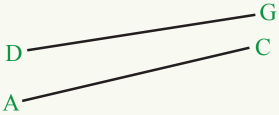
خط $\overline{AH}$ با خط d زاویهٔ 90° می‌سازد. قطعه‌خط $\overline{AH}$ عمود بر خط مستقیم d است، که این طور نشان داده می‌شود: $AH \perp d$

فعالیت

- خط‌کش را روی کاغذ بگذارید و از هر دو کنار خط‌کش دو خط رسم کنید و این خطوط را d_1 و d_2 بنامید.

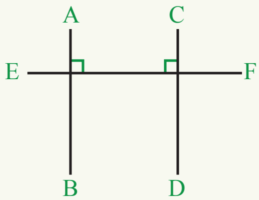


- بالای خط d_1 سه نقطه A، B و C را انتخاب و به کمک گونیا از نقطهٔ A، نقطهٔ B و نقطهٔ C بر خط d_2 عمود رسم کنید و نظر به شکل عمودها را $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ و $\overline{CF}$ بنامید.
- طول قطعه‌خط‌های مستقیم $\overline{AD}$، $\overline{BE}$ و $\overline{CF}$ را اندازه بگیرید. در مورد طول‌های شان چه گفته می‌توانید؟



دو خط d_1 و d_2 را که فاصله بین شان مساوی است، خطوط موازی می‌نامند که این طور نشان داده می‌شود: $d_1 \parallel d_2$.

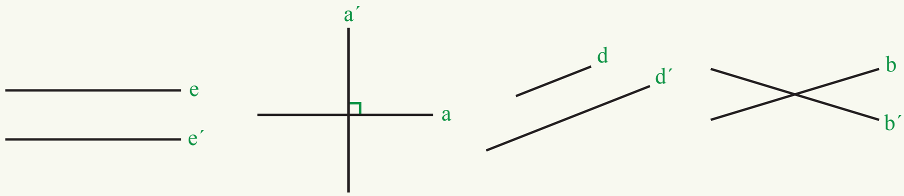
دو خط مستقیم $\overline{AC}$ و $\overline{DG}$ که فاصله بین آن‌ها مساوی نیست، طوری که در شکل نیز مشاهده می‌شود موازی نیستند؛ زیرا که امتداد یافتهٔ آن‌ها یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کند و این طور نمایش داده می‌شود: $\overline{AC} \nparallel \overline{DG}$



می‌توان به کمک گونیا یا خط‌کش نشان داد که فاصلهٔ بین این دو قطعه‌خط مستقیم در نقاط مختلف مساوی نیست.

اگر دو قطعه‌خط $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ را بالای $\overline{EF}$ عمود رسم کنیم ($AB \perp EF$ و $CD \perp EF$) خطوط DC و AB موازی می‌باشند، زیرا اگر موازی نباشند همدیگر را قطع می‌کنند که از یک نقطهٔ تقاطع دو عمود بر خط $\overline{EF}$ رسم شده است و این امکان ندارد.

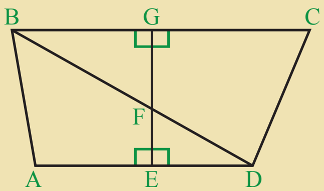
مثال: در بین خطوط زیر خطوط موازی، عمود و متقاطع را مشخص کنید:



حل: $e \parallel e'$ ، $d \parallel d'$ ، $a' \perp a$ و خطوط b و b' با هم متقاطع اند.

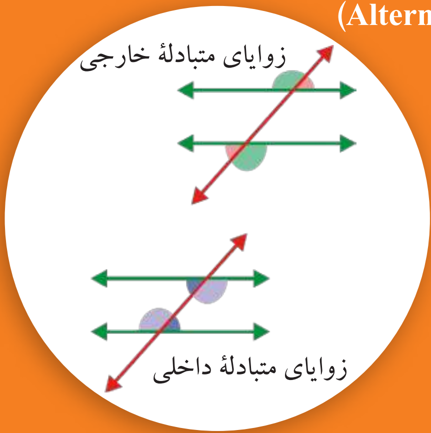
دو خط مستقیم را وقتی موازی می‌گوییم که خود خطوط و یا امتداد شان نقطهٔ مشترک نداشته باشند. فاصله بین این دو خط در تمام نقاط مساوی می‌باشد. دو خط وقتی با هم عمود اند که زاویه بین آن‌ها یک زاویهٔ قایمه (90°) باشد.

تمرین



- در شکل مقابل کدام قطعه‌خط‌ها موازی‌اند؟
- کدام قطعه‌خط‌ها بر هم عموداند؟
- کدام دو قطعه‌خط‌ها متقاطع اند؟
- کدام زاویه‌ها قایمه اند؟
- آیا همهٔ خطوط متقاطع بر هم عمود می‌باشند؟

زوایای متبادلهٔ داخلی و خارجی
(Alternate interior and exterior angles)

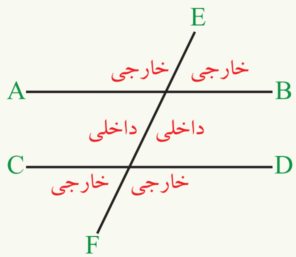


شــکل مقابل را مشــاهده و در مــورد زوایای تشکیل شدهٔ آن اظهار نظر کنید.

فعالیت

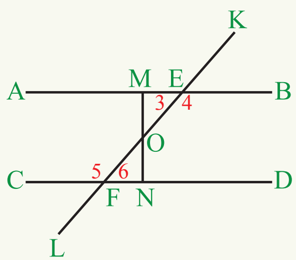
دو خط موازی d_1 و d_2 و دو خط غیر موازی d_3 و d_4 را رسم کنید.

- دو خط قاطع را که یکی از آن خطوط d_1 و d_2 و دیگر آن خطوط d_3 و d_4 را قطع کند رسم کنید.
- زوایایی را که قاطع با خطوط موازی می‌سازند و زوایایی را که قاطع با خطوط غیر موازی می‌سازند، توسط نقاله اندازه بگیرید. چه نتیجه‌یی به دست می‌آید؟



دو قطعه‌خط $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ با هم موازی‌اند و توسط $\overline{EF}$ قطع شده‌اند.

طوری که در شکل مشاهده می‌شود ناحیه بین دو خط را ناحیهٔ داخلی و ناحیهٔ خارج دو طرف دو خط را ناحیهٔ خارجی می‌گویند.



$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ است و خط $\overline{LK}$ این دو خط را قطع کرده است.

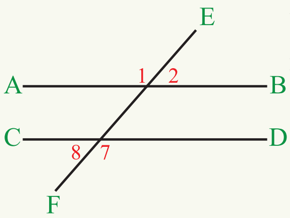
برای نشــان دادن این که $\hat{3} = \hat{6}$ اســت، نقطــهٔ O را روی خط $\overline{LK}$ انتخــاب نموده و از نقطهٔ O خــط عمود بر $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ رسم می‌کنیم، دو مثلث $\overset{\Delta}{OME}$ و $\overset{\Delta}{OFN}$ تشکیل می‌شود.

چــون $M\hat{O}E = F\hat{O}N$ مــتقــابــل به رأس و $O\hat{M}E = O\hat{N}F = 90^\circ$ است؛ پس زاویه‌های سومی این

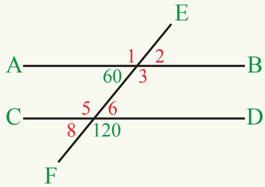
مثلث‌ها نیز با هم مساوی می‌باشند؛ در نتیجه $\hat{3}=\hat{6}$ می‌شود. زوایای $\hat{3}$ و $\hat{6}$ را به نام زوایای متبادلهٔ داخلی یاد می کنند؛ به همین ترتیب، $\hat{5}=\hat{4}$ است و هر دو زوایای متبادلهٔ داخلی نیز می‌باشند.

همچنین در شکل زوایای $\hat{1},\hat{7},\hat{2}$ و $\hat{8}$ زوایای متبادلهٔ خارجی می‌باشند؛ پس به کمک زوایای متبادلهٔ داخلی داریم:

$\hat{8}=\hat{2}$, $\hat{1}=\hat{7}$



مثال : در شکل مقابل دو زاویهٔ 60° و 120° داده شده اند، زوایای $\hat{1}$, $\hat{2}$, $\hat{3}$, $\hat{5}$, $\hat{6}$ و $\hat{8}$ چند درجه می‌باشند؟



حل:

$\hat{6}=60^\circ$ متبادلهٔ داخلی $\hat{1}=120^\circ$ متبادلهٔ خارجی

$\hat{5}=120^\circ$ متقابل به رأس $\hat{8}=\hat{6}=60^\circ$ متقابل به رأس

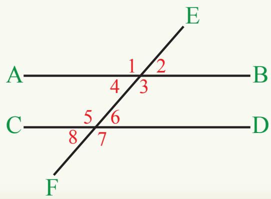
$\hat{3}=\hat{5}$ متبادلهٔ داخلی $\hat{8}=\hat{2}$ متبادلهٔ خارجی

در نتیجه $\hat{3}=120^\circ$ است و از مقایسهٔ مساوات فوق $\hat{2}=60^\circ$ می‌باشد.

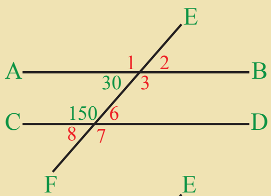
اگر دو خط موازی AB و CD توسط خط قاطع EF قطع شوند دو جوره زوایای متبادلهٔ داخلی و دو جوره زوایای متبادلهٔ خارجی را می‌سازند که:

متبادلهٔ داخلی: $\hat{6}=\hat{4}$ و $\hat{5}=\hat{3}$

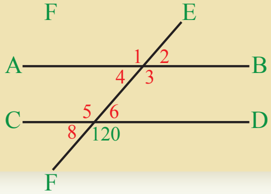
متبادلهٔ خارجی: $\hat{8}=\hat{2}$ و $\hat{7}=\hat{1}$



تمرین



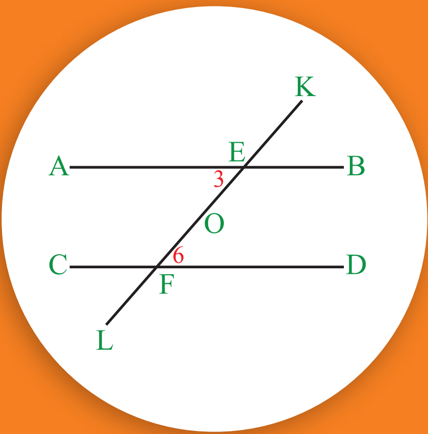
1- اگر $\overline{AB}\parallel\overline{CD}$ باشد، در شکل زوایای $\hat{1}$, $\hat{3}$, $\hat{8}$, $\hat{7}$, $\hat{6}$ و $\hat{2}$ چند درجه می‌باشند؟



2- در شکل اگر $\hat{7}=120^\circ$ باشد، مقدار زوایای $\hat{8}$، $\hat{6}$، $\hat{5}$، $\hat{4}$، $\hat{3}$، $\hat{2}$ و $\hat{1}$ را دریابید.

موازی بودن دو خط در صورتی که زوایای متبادله با هم مساوی باشند

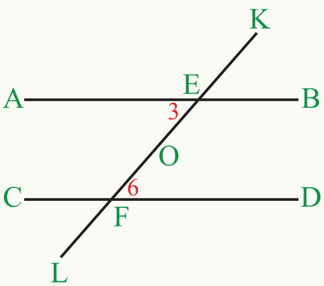
در شکل مقابل زوایایی $\hat{3}$ و $\hat{6}$ که دو زاویهٔ متبادلهٔ داخلی اند با هم مساوی می‌باشند.
آیا $AB \parallel CD$ شده می تواند؟



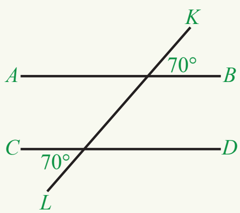
فعالیت

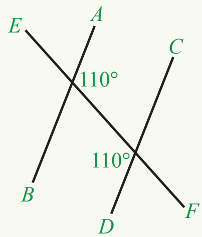
زوایای $\hat{3}$ و $\hat{6}$ با هم مساوی اند.

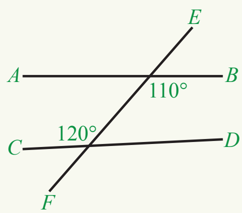
- در شکل مقابل از نقطهٔ O وسط خط $\overline{EF}$ بالای $\overline{AB}$ عمود رسم کنید. نقطهٔ تقاطع با $\overline{AB}$ را M بنامید و آن را امتداد دهید که خط $\overline{CD}$ را در N قطع کند.
- نشان دهید که دو مثلث $\overset{\Delta}{MOE}$ و $\overset{\Delta}{FON}$ با هم مساوی اند.
- آیا خط مستقیم $\overline{MN}$ بر خط مستقیم $\overline{CD}$ نیز عمود است؟
- چرا $\overline{AB}$ موازی با $\overline{CD}$ است؟



مثال اول: در اشکال زیر کدام دو خط مستقیم AB و CD با هم موازی اند ؟



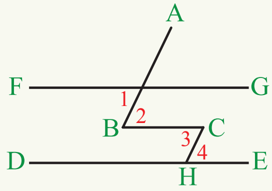




حل: $70^\circ = 70^\circ$ متبادلهٔ خارجی؛ پس $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ است.
$110^\circ = 110^\circ$ متبادلهٔ داخلی؛ پس $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ است.
$120^\circ \neq 110^\circ$؛ پس $\overline{AB} \nparallel \overline{CD}$ است.

مثال دوم: اگر $\hat{2}=\hat{1}$ ، $\hat{3}=\hat{2}$ و $\hat{4}=\hat{3}$ باشد، کدام جوره از خطوط موازی اند؟

حل:



چون $\hat{2}=\hat{1}$ است؛ پس $\overline{FG} \parallel \overline{BC}$

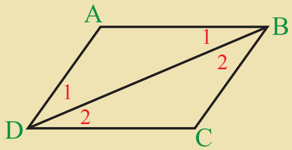
$\hat{3}=\hat{2}$ است؛ پس $\overline{AB} \parallel \overline{CH}$

$\hat{4}=\hat{3}$، پس $\overline{BC} \parallel \overline{DE}$ می‌باشد.

اگر دو خط توسط یک خط طوری قطع شوند که دو زاویهٔ متبادلهٔ مساوی را بسازند، این دو خط با هم موازی اند.

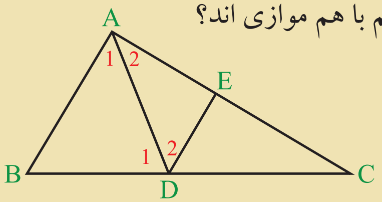
تمرین

1- در شکل زیر $\hat{B}_1=\hat{D}_2$ و $\hat{B}_2=\hat{D}_1$ است، آیا $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ است؟ چرا؟

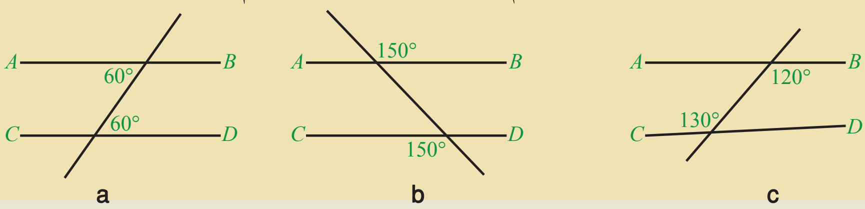


2- در شکل زیر، اگر:

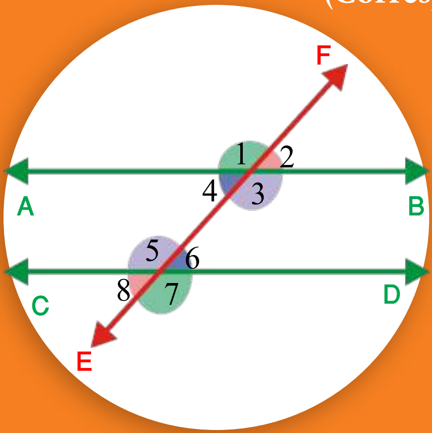
$\hat{A}_1=\hat{D}_2$ و $\hat{A}_2=\hat{D}_1$ باشد، کدام خطوط مستقیم با هم موازی اند؟



3- در هر یک از شکل‌های زیر کدام دو خط AB و CD با هم موازی اند؟

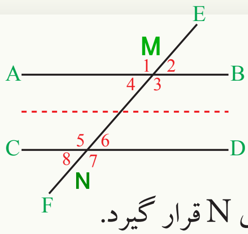


زوایای متوافقه (Corresponding angles)



در شکل $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ است و خط EF این دو خط را قطع کرده است.
زوایای ($\hat{4}$ و $\hat{8}$)، ($\hat{6}$ و $\hat{2}$)، ($\hat{3}$ و $\hat{7}$) و ($\hat{5}$ و $\hat{1}$) را به نام زوایای متوافقه یاد می کنند. آیا این زوایا با هم مساوی اند؟

فعالیت



شکل مقابل را در نظر بگیرید.

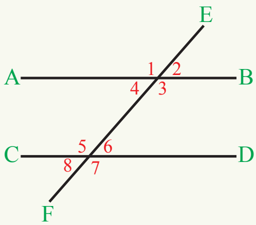
- چهار طرف شکل را توسط قیچی ببرید.
- سپس محل نقطه‌چین را جدا کنید.
- حال قطعه‌خط CD را به روی قطعه‌خط AB قرار دهید تا M روی N قرار گیرد.

دربارۀ زوایای $\hat{1}$ تا $\hat{8}$ چه می‌توان گفت؟

$\hat{1} = \hat{5}$, $\hat{2} = \cdots$, $\cdots = \hat{7}$, $\hat{4} = \cdots$

- به کمک نقاله زوایای $\hat{1}$ تا $\hat{8}$ را اندازه کرده، درستی برابری‌های بالا را بررسی کنید.

همچنین اگر دو خط توسط یک قاطع طوری قطع شوند که زوایای متوافقۀ مساوی را بسازند این دو خط با هم موازی‌اند.

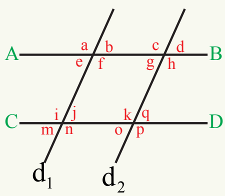


دو قطعه‌خط مستقیم AB و CD توسط خط مستقیم EF قطع شده اند.
اگر $\hat{6} = \hat{2}$ باشد، می‌خواهیم نشان دهیم که $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ می‌باشد.

چون $\hat{2} = \hat{4}$ قرار متقابل به رأس

$\hat{2} = \hat{6}$ قرار مفروض

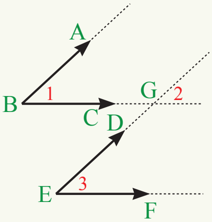
در نتیجه $\hat{6} = \hat{4}$ است. از طرف دیگر چون $\hat{4}$ و $\hat{6}$ زوایای متبادله استند، در نتیجه $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ می‌باشد.



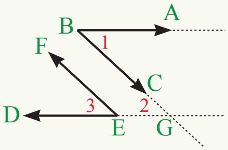
مثال اول: در شکل: $\hat{h} = \hat{p}$ ، $\hat{b} = \hat{j}$ ، $\hat{m} = \hat{o}$ و $\hat{n} = \hat{p}$ می باشد.
آیا قطعه‌خط AB موازی با قطعه‌خط CD و $d_1 \parallel d_2$ است؟

حل: چون $\hat{p} = \hat{h}$ و $\hat{j} = \hat{b}$ می‌باشد که زوایای متوافقه اند و با هم مساوی؛ پس $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ است.

و چون $\hat{p} = \hat{n}$ و $\hat{o} = \hat{m}$ می‌باشد که زوایای متوافقه اند و با هم مساوی؛ پس $d_1 \parallel d_2$ است.



(a)



(b)

مثال دوم: در شکل (a) دو زاویهٔ $\hat{ABC}$ و $\hat{DEF}$ که ضلع AB موازی و هم‌جهت با ED و ضلع BC موازی و هم‌جهت با EF می‌باشد. آیا می‌توانید نشان دهید که $\hat{1} = \hat{3}$ می‌باشد؟

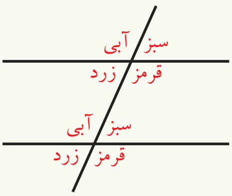
حل: ابتدا مطابق شکل های (a) و (b) اضلاع BC و ED را امتداد می‌دهیم تا در نقطهٔ G همدیگر را قطع کنند.

در شکل a:
$\hat{1} = \hat{2}$ متوافقه
$\hat{3} = \hat{2}$ متوافقه

در نتیجه: $\hat{1} = \hat{3}$ می‌باشد.

همچنین در شکل (b) ضلع AB موازی و مختلف‌الجهت با ضلع ED، و BC موازی و مختلف الجهت با ضلع EF می‌باشد. زوایای $\hat{1}$ و $\hat{3}$ نیز با هم مساوی اند؛ زیرا: $\hat{1} = \hat{2}$ (قرارمتبادله)، $\hat{3} = \hat{2}$ (قرارمتوافقه)

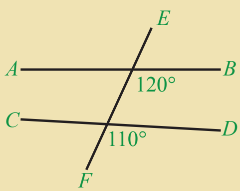
در نتیجه: $\hat{1} = \hat{3}$ می‌باشد.

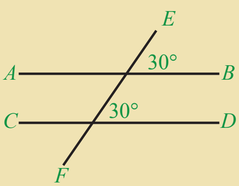


اگر دو خط موازی توسط یک خط قاطع قطع شوند، زوایای مساوی متوافقه را می‌سازند و اگر دو خط مستقیم توسط خط قاطع طوری قطع شوند که زوایای متوافقهٔ مساوی را بسازند، این دو خط با هم موازی اند.

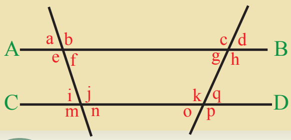
تمرین

1- کدام جوره از خطوط مستقیم با هم موازی اند؟



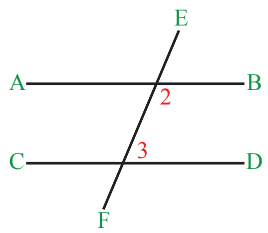


2- دو خط مستقیم $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ با هم موازی اند، کدام زاویه‌ها با هم مساوی اند؟



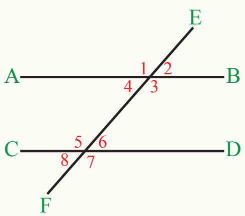
زوایای متممهٔ داخلی یک طرف خط قاطع (Supplementary Angles)

اگر $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ و خط مستقیم $\overline{EF}$ دو خط موازی را طوری که در شکل مشاهده می‌شود قطع کرده باشد، آیا می‌توانید بگویید که $\hat{3}+\hat{2}$ چند درجه می‌شود؟



فعالیت

دو خط مستقیم AB و CD موازی اند و خط مستقیم EF آن‌ها را مطابق شکل قطع کرده است.

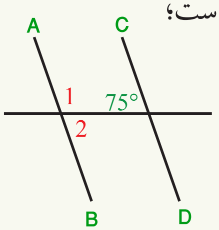


- $\hat{3}+\hat{4}=\square$
- از طرف دیگر $\hat{6}=\hat{4}$ است. چرا؟
- از دو تساوی بالا خانهٔ خالی زیر را پر کنید.

  $\hat{3}+\hat{6}=\square$
- به کمک نقاله زاویه‌های $\hat{3}$ و $\hat{6}$ را اندازه گرفته، مجموع آن دو را به دست آورید.
- خانهٔ خالی زیر را پر کنید.

  $\hat{4}+\hat{5}=\square$

مثال: در شکل اگر خطوط مستقیم AB و CD با هم موازی باشند، اندازهٔ $\hat{1}$ و $\hat{2}$ را دریابید.



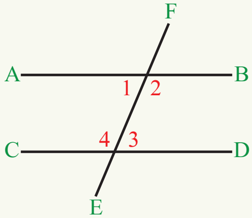
حل: چون $\hat{1}$ و زاویهٔ 75° متممهٔ داخلی استند و مجموع آن‌ها 180° است؛

$$\hat{1}+75^\circ=180^\circ$$

پس: $\hat{1}=180^\circ-75^\circ=105^\circ$

چون زاویهٔ 75° و $\hat{2}$ متبادله استند: $\hat{2}=75^\circ$

اگر دو خط مستقیم AB و CD موازی باشند و خط مستقیم EF این دو خط را طوری که در شکل مشاهده می‌شود قطع کرده باشد، دو زاویهٔ داخلی یک طرف قاطع به نام زوایای متممهٔ داخلی یک طرف خط قاطع یاد می گردند که مجموع شان مساوی به 180° می شود.

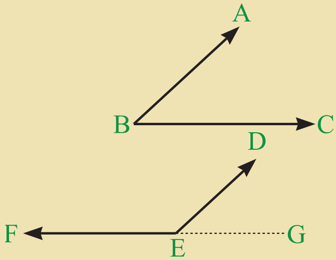


$\hat{2}+\hat{3}=180^\circ$ و $\hat{1}+\hat{4}=180^\circ$.

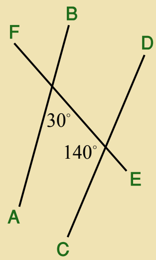
اگر یک خط قاطع با دو خط مستقیم، دو زاویهٔ متممهٔ داخلی یک طرف خط قاطع را بسازد، این دو خط با هم موازی اند.

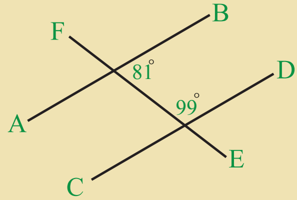
تمرین

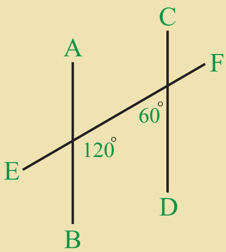
1- در شکل مقابل دو زاویهٔ $A\hat{B}C$ و $D\hat{E}F$ را داریم که ضلع AB موازی و هم‌جهت ED و ضلع BC موازی و مختلف‌الجهت EF می‌باشد؛ نشان دهید که $A\hat{B}C+D\hat{E}F=180^\circ$ می‌شود.

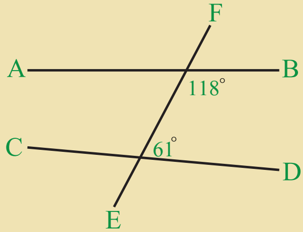


2- کدام جوره از خطوط مستقیم زیر با هم موازی اند؟









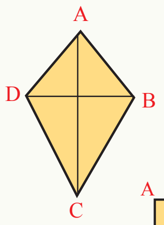


چهارضلعی ها(Quadrilaterals)

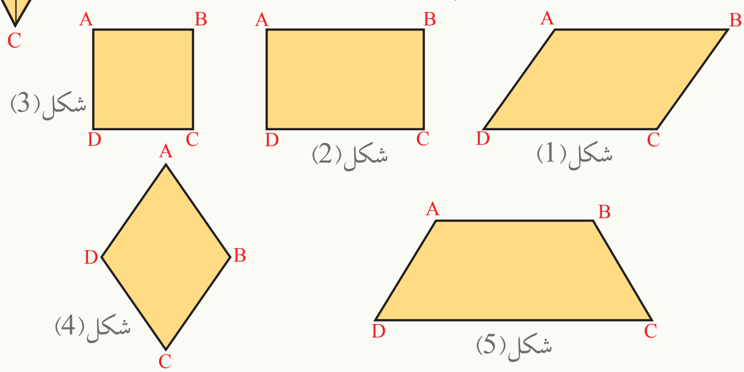


در شــکل مقابل چه تعداد چهارضلعی مشاهده می‌شود؟

فعالیت



- ABCD یک چهارضلعی است. چهار ضلع، چهار رأس، چهار زاویه و دو قطر آن را نام ببرید.
- هر یک از چهارضلعی‌های زیر را نام ببرید.



طوری که می‌دانید در تمام چهارضلعی های بالا، به جز ذوزنقه،اضلاع مقابل آن‌ها دو به دو با هم موازی اند و در ذوزنقه فقط دو ضلع مقابل آن با هم موازی استند.

شکل شماره (1) متوازی الاضلاع(Parallelogram): یک چهارضلعی است که اضلاع مقابل آن دو به دو با هم موازی و مساوی می‌باشند.

شکل (2) مستطیل(Rectangle): یک چهارضلعی است که اضلاع مقابل آن دو به دو موازی و مساوی اند و هر چهار زاویهٔ آن قایمه می‌باشند.

شکل (3) مربع(Square): یک چهارضلعی است که هر چهار ضلع آن با هم مساوی

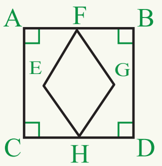
و هر چهار زاویهٔ آن قایمه می‌باشند.

شکل (4) معین یا لوزی (Rhombus): یک چهارضلعی است که اضلاع مقابل آن دو به دو موازی و هر چهار ضلع آن با هم مساوی و زوایای مقابل آن نیز با هم مساوی می‌باشند.

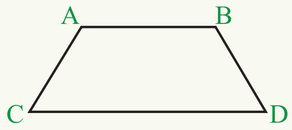
شکل (5) ذوزنقه یا منحرف (Trapezoid): چهارضلعی‌یی است که فقط دو ضلع مقابل آن با هم موازی اند.

مثال: در اشکال زیر، مربع، مستطیل، متوازی‌الاضلاع، معین یا لوزی و ذوزنقه را نشان دهید.

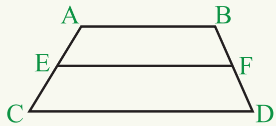
(a)



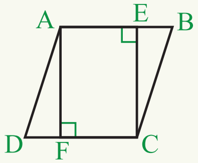
(b)



(c)



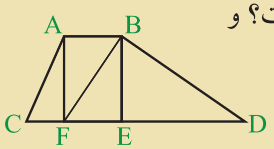
(d)



حل: در شکل **(a)** ABDC مربع و شکل FEHG معین می‌باشد؛ در شکل **(b)** ABDC یک ذوزنقه است، در شکل **(c)** اشکال ABDC، EFDC و ABFE ذوزنقه می‌باشند و در شکل **(d)**، ABDC یک متوازی‌الاضلاع و AFCE یک مستطیل است.

تمرین

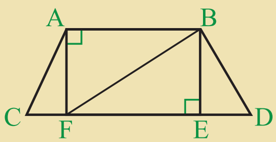
1- در شکل مقابل کدام یک مستطیل و کدام یک ذوزنقه است؟ و نیز بگویید که در این شکل چند مثلث موجود می‌باشد؟



2- کدام جملات درست و کدام نادرست اند؟

- هیچ گاه یک ذوزنقه متوازی‌الاضلاع شده نمی‌تواند.
- اضلاع مقابل مستطیل دو به دو موازی و مساوی‌اند.
- اضلاع مقابل ذوزنقه دو به دو موازی و مساوی می‌باشند.
- لوزی یک متوازی‌الاضلاع است.
- مربع یک متوازی‌الاضلاع است.
- لوزی یک مربع است.

3- در شکل مقابل سه ذوزنقه، یک مستطیل و یک متوازی‌الاضلاع را نشان دهید.

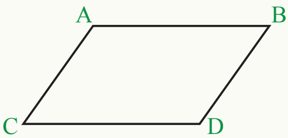


زوایای مقابل متوازی‌الاضلاع

آیا زوایای مقابـــل متوازی الاضلاع با هم مساوی استند؟



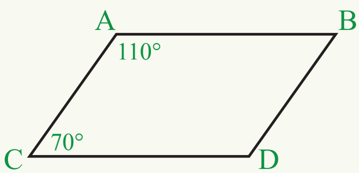
فعالیت



متوازی الاضلاع ABDC داده شده است.

- چون $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ، پس $\hat{A}+\hat{C}=\square$
- چون $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$ ، پس $\hat{C}+\hat{D}=\square$
- از رابطهٔ بالا داریم: $\hat{A}+\hat{C}=\hat{C}+\square$
- از تفریق کردن $\hat{C}$ از هر دو طرف چه رابطه یی به دست می‌آید؟ $\square=\square$
- راجع به زوایای $\hat{A}$ و $\hat{D}$ چه می‌توان گفت؟ به همین ترتیب نشان دهید $\hat{B}=\hat{C}$ می‌باشد.

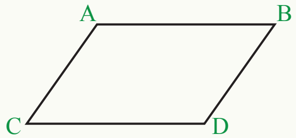
در یک متوازی‌الاضلاع زوایای مقابل آن با هم مساوی اند.



مثال: شکل ABDC یک متوازی الاضلاع است، اندازهٔ زوایای $\hat{B}$ و $\hat{D}$ را معلوم کنید.

حل: چون زوایای مقابل یک متوازی‌الاضلاع با هم مساوی اند؛ پس $\hat{D}=\hat{A}=110^\circ$ و $\hat{B}=\hat{C}=70^\circ$

فعالیت



چهارضلعی ABDC را در نظر می گیریم.

- $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}=\square$ ....(I)
- با توجه به تساوی زوایای مقابل متوازی‌الاضلاع داریم: $\hat{A}=\square \ , \ \hat{B}=\hat{C}$
- اکنون در رابطهٔ (I) به عوض A و B مقدارهای C و D را می گذاریم.

$\hat{D}+\hat{C}+\hat{C}+\hat{D}=\square$

از رابطهٔ بالا $2\hat{C}+2\hat{D}=\square$

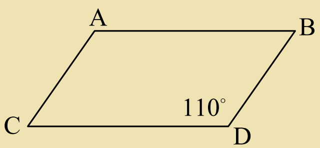
$\hat{C}+\hat{D}=\square$

- قطعه‌خط‌های AB و CD چه رابطه یی با هم دارند؟
- به طور مشابه چه رابطه یی بین $\overline{AC}$ و $\overline{BD}$ وجود دارد؟

اگر در یک چهارضعلی زوایای مقابل آن با هم مساوی باشند، این چهارضعلی متوازی‌الاضلاع است.

تمرین

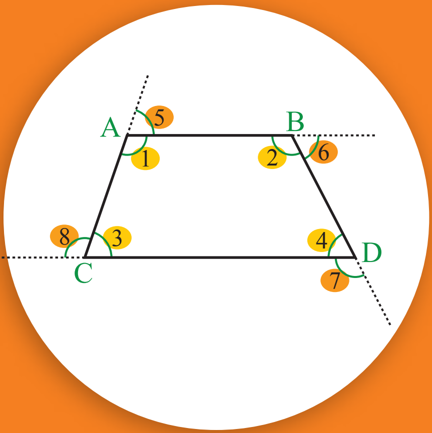
1- اگر در متوازی‌الاضلاع زیر $\hat{D}=110^\circ$ باشد، زوایای $\hat{A}, \hat{B}$ و $\hat{C}$ را دریابید.



2- اگر قطر یک چهارضلعی، چهارضعلی را به دو مثلث انطباق‌پذیر تقسیم کند، آیا این چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است؟

زوایای خارجی یک چهارضلعی

آیا می‌توانید بگویید که مجموع زوایای خارجی یک چهارضلعی چند درجه می‌شود؟



اضلاع AC ، AB، BD و CD را مطابق شکل بالا امتداد می‌دهیم. زوایای $\hat{5}$، $\hat{6}$، $\hat{7}$ و $\hat{8}$ زوایای خارجی این چهارضلعی می‌باشند.

می‌خواهیم نشان دهیم که $\hat{5}+\hat{6}+\hat{7}+\hat{8}=360^\circ$ می‌باشد.

$$\hat{1}+\hat{5}=180^\circ$$
$$\hat{2}+\hat{6}=180^\circ$$
$$\hat{4}+\hat{7}=180^\circ$$
$$\hat{3}+\hat{8}=180^\circ$$

اگر هر دو طرف را جمع کنیم داریم که:

$$\hat{1}+\hat{2}+\hat{3}+\hat{4}+\hat{5}+\hat{6}+\hat{7}+\hat{8}=180^\circ+180^\circ+180^\circ+180^\circ$$

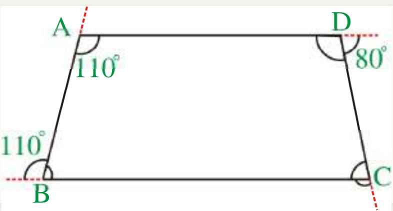
با توجه به این که مجموع زوایای داخلی چهارضلعی 360° است داریم:

$$360^\circ+\hat{5}+\hat{6}+\hat{7}+\hat{8}=360^\circ+360^\circ$$

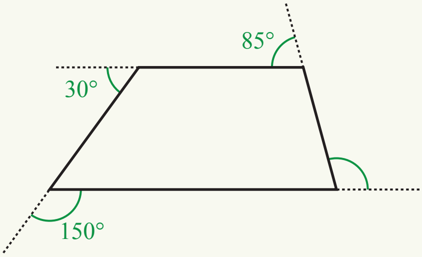
در نتیجه $\hat{5}+\hat{6}+\hat{7}+\hat{8}=360^\circ$ پس مجموع زوایای خارجی یک چهارضلعی 360° می‌باشد.

فعالیت

در شکل دو زاویهٔ خارجی چهارضلعی نامعلوم می‌باشند؛ آن‌ها را دریابید.



مثال: سه زاویهٔ خارجی این چهارضلعی داده شده اند. زاویهٔ چهارمی آن چند درجه می‌شود؟



حل:

$150^\circ + 30^\circ + 85^\circ = 265^\circ$

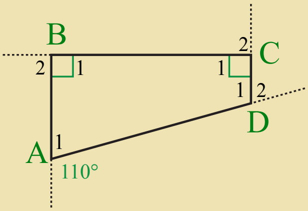
چون مجموعهٔ هر چهار زاویهٔ خارجی یک چهارضلعی 360° می‌باشد، زاویهٔ چهارمی مساوی است به: $360^\circ - 265^\circ = 95^\circ$

مجموعهٔ زوایای خارجی یک چهارضلعی 360° می‌باشد.

تمرین

1- مجموع سه زاویهٔ خارجی یک چهارضلعی 301° می‌باشد. زاویهٔ چهارمی این چهارضلعی چند درجه می‌شود؟

2- در شکل مقابل یک زاویهٔ خارجی چهارضلعی داده شده است، سه زاویهٔ خارجی دیگر این چهارضلعی را دریابید.



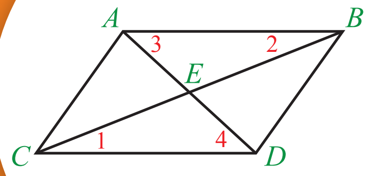
3- آیا مجموع چهار زاویهٔ داخلی یک چهارضلعی با مجموع چهار زاویهٔ خارجی یک چهارضلعی مساوی است؟ چرا؟

4- مجموع زوایای داخلی و خارجی یک چهارضلعی مساوی است به:

a) 360° b) 720°

5- اگر مجموع سه زاویهٔ داخلی یک چهارضلعی 315° باشد، زاویهٔ چهارم داخلی این چهارضلعی چند درجه است؟

a) 50° b) 45° c) 25°



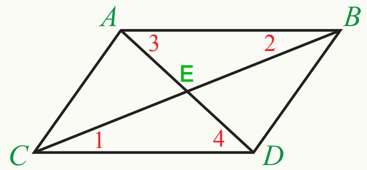
خاصیت‌های قطرهای متوازی‌الاضلاع

در مورد قطرهای یک متوازی‌الاضلاع چه می‌توان گفت؟

BC و AD دو قطر متوازی‌الاضلاع ABDC می‌باشند.

فعالیت

- ابتداء طول قطرهای متوازی‌الاضلاع را معلوم کنید.
- گفته می‌توانید که قطرها با همدیگر چه رابطه یی دارند؟
- خانه‌های خالی زیر را پر کنید.



$\hat{1} = \hat{\square}$ چرا؟

$\hat{3} = \hat{\square}$ چرا؟

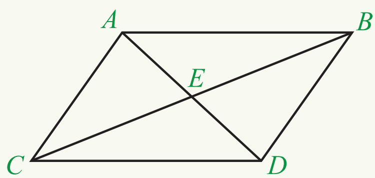
$\overline{AB} = \square$ چرا؟

$\triangle\square \cong \triangle\square$ چرا؟

آیا می‌توانید از تساوی دو مثلث ABE و CED بگویید که قطرهای متوازی‌الاضلاع یک دیگر را نصف می‌کنند؟

قطرهای متوازی‌الاضلاع یکدیگر را نصف می کنند.

مثال: در متوازی‌الاضلاع ABDC قطع $BC = 8cm$ و قطر $AD = 6cm$ می‌باشد؛ طول‌های AE و EC را معلوم کنید.

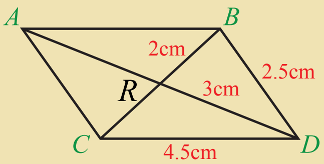


حل: چون قطرهای متوازی‌الاضلاع یک دیگر را نصف می کنند، بنابراین:

$$\overline{AE} = \frac{\overline{AD}}{2} = \frac{6cm}{2} = 3cm \quad ، \quad \overline{EC} = \frac{\overline{BC}}{2} = \frac{8cm}{2} = 4cm$$

تمرین

1- در چهارضلعی زیر قطعه‌خط های نامعلوم را دریابید.



2-کامل ترین جواب را نشانی کنید.

در یک متوازی‌الاضلاع قطرها:

a) با هم عمود اند.

b) یکدیگر را نصف می کنند.

c) هر دو درست اند.

در یک متوازی‌الاضلاع:

a) زوایای مقابل آن دو به دو با هم مساوی اند.

b) اضلاع مقابل آن دو به دو با هم مساوی اند.

c) هر دو درست اند.

از تقاطع قطرهای متوازی‌الاضلاع:

a) دو جوره مثلث‌های انطباق‌پذیر تشکیل می‌شوند.

b) چهار مثلث انطباق‌پذیر تشکیل می‌شوند.

قطرهای مستطیل

در شـــکل مقابــل ســطح روی میز کدام شکل هندسی را دارد؟ در مورد خواص آن چه می‌دانید؟



فعالیت

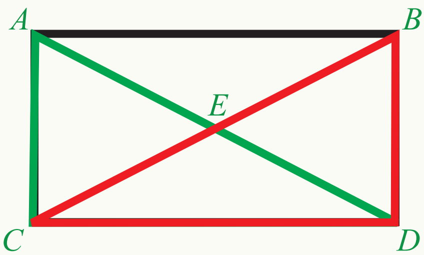
مستطیل ABDC را در نظر بگیرید:

- قطرهای مستطیل را رسم نموده، نقطهٔ تقاطع را E بنامید.
- قطرهای مستطیل را با خط‌کش اندازه گرفته و ببینید که با هم مساوی اند؟
- با در نظرداشت شکل زیر دو مثلث ACD و BCD، خانه‌های خالی زیر را پر کنید.

$\overline{DB} = \square$

$\hat{C} = \hat{\square}$

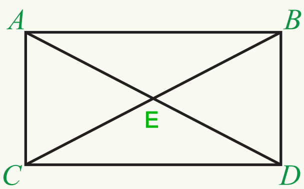
ضلع مشترک $\square = \square$



- دربارهٔ دو مثلث ACD و BCD چه می‌توان گفت؟
- آیا $\overline{BC} = \overline{AD}$ است؟

در هر مستطیل قطرها با هم مساوی و یکدیگر را نصف می کنند.

مثال: در شکل مقابل $\overline{AD}$ و $\overline{BC}$ قطرهای مستطیل ABDC می‌باشند؛ اگر $\overline{ED} = 4cm$ باشد، طول BC را معلوم کنید.

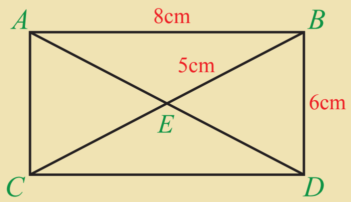


حل: چون قطرهای مستطیل یکدیگر را نصف می کنند: $\overline{AE}=4cm$ و $\overline{AD}=8cm$ می باشند.

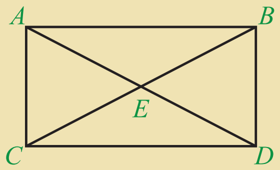
از طرف دیگر چون قطرهای مستطیل با همدیگر مساوی اند. $\overline{BC}=\overline{AD}$؛ پس $\overline{BC}=8cm$ می‌باشد.

تمرین

1- در مستطیل زیر طول‌های نامعلوم را دریابید.



2- اگر $\overline{BC}=6cm$ باشد، طول $\overline{AD}$، $\overline{AE}$، $\overline{ED}$، $\overline{EB}$ و $\overline{EC}$ را معلوم کنید.



3- اگر یک قطر مستطیل 18cm باشد، اندازهٔ قطر دیگر این مستطیل مساوی است به:

a) 9cm b) 18cm c) 4.5cm

4- اگر نصف یک قطر یک مستطیل 6cm باشد، هر قطر این مستطیل مساوی است به:

a) 12cm b) 6cm c) 24cm

5- از تقاطع قطرهای یک مستطیل چند مثلث انطباق‌پذیر تشکیل می‌شوند؟

a) 2 b) 4 c) هر دو غلط اند

6- کامل‌ترین جواب را نشانی کنید.

در مستطیل قطرها:

a) با هم مساوی اند.

b) یکدیگر را نصف می کنند.

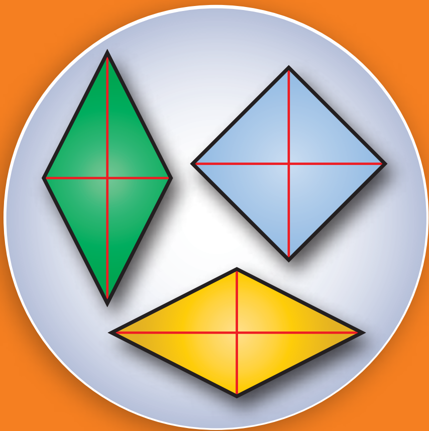
c) هر دو درست اند.

7- چهارضلعی‌هایی که تمام خواص متوازی‌الاضلاع را دارند، عبارت اند از:

a) مربع b) معین (لوزی) c) مستطیل d) هر سه پاسخ درست اند

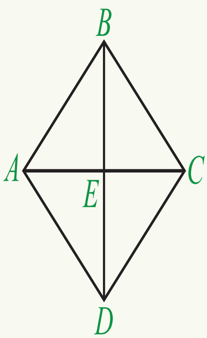
قطرهای لوزی(معین)

در شکل مقابل اشکال هندسی را نام ببرید.



فعالیت

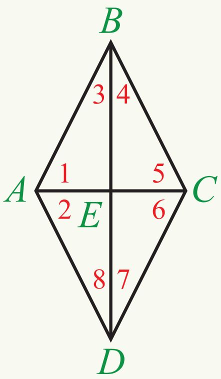
- یک لوزی را رسم کنید که یک ضلع آن 4cm و یک زاویهٔ آن 50° باشد.
- قطرهای این لوزی را رسم کنید.
- زاویه بین قطرهای این لوزی را اندازه بگیرید. در مورد آن چه می‌توان گفت؟



$\overline{AC}$ و $\overline{BD}$ دو قطر لوزی ABCD می‌باشند.
می خواهیم ثابت کنیم که قطرهای لوزی بر یکدیگر عمود اند.
در لوزی ABCD داریم که:
اضلاع لوزی با هم مساوی اند .... $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AD}$
از طرف دیگر دو قطر $\overline{AC}$ و $\overline{BD}$ یکدیگر را نصف می کنند.
(لوزی یک متوازی‌الاضلاع است.)
پس:

$$\overline{EB} = \overline{ED}$$
$$\overline{AE} = \overline{EC}$$

دو مثلث ABC و ACD متساوی‌الساقین می‌باشند.(اضلاع لوزی با یکدیگر مساوی اند.)
در مثلث متساوی‌الساقین ABC ضلع AC به دو قسمت مساوی تقسیم شده است؛ بدین معنی که خط مستقیم BE میانه و ارتفاع مثلث ABC نیز می‌باشد.
چون در نقطهٔ E خط مستقیم BE عمود بر AC و همچنین در نقطهٔ E خط مستقیم ED عمود بر AC می‌باشد؛ در نتیجه: $BD \perp AC$ می‌باشد.



مثال: در شکل مقابل AC و BD قطرهای لوزی $ABCD$ می‌باشند.

اگر $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \hat{C}_5 = \hat{C}_6 = 60^\circ$ باشد، اندازهٔ زوایای $\hat{B}_3$، $\hat{B}_4$، $\hat{D}_7$ و $\hat{D}_8$ را دریابید.

حل: چون مثلث‌های ABE، BCE، CDE و ADE قایم‌الزاویه می‌باشند.

$$\hat{D}_7 = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

در نتیجه: $\hat{B}_3 = \hat{B}_4 = \hat{D}_7 = \hat{D}_8 = 30^\circ$ می‌باشد.

قطرهای لوزی بر همدیگر عمود اند و یکدیگر را نصف می کنند.

تمرین

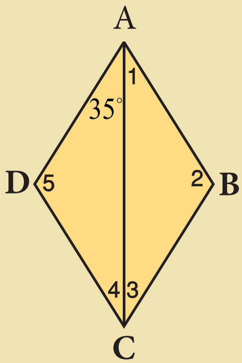
1- آیا قطرهای لوزی زاویه‌های رأس را نصف می کنند؟

2- آیا در لوزی قطرها با هم مساوی و بر یکدیگر عمود اند؟

3- آیا قطرهای معین یکدیگر را نصف می کنند؟

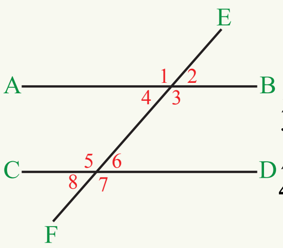
4- آیا معین(لوزی) یک متوازی‌الاضلاع است؟

5- در این شکل معین(لوزی) در صورتی که یک زاویه آن 35° باشد. مقدار زوایای $\hat{1}$, $\hat{2}$, $\hat{3}$, $\hat{4}$ و $\hat{5}$ را دریابید.



خلاصهٔ فصل ششم

- دو خط مستقیمی که در یک مستوی قرار دارند و خود شان یا امتداد شان نقطهٔ مشترکی نداشته باشند، با هم موازی‌اند. فاصلهٔ بین دو خط موازی، مساوی است.
- دو خط مستقیم عمود بر یک خط مستقیم، با هم موازی اند.
- دو خط مستقیم وقتی بر همدیگر عمود می‌باشند که زاویه بین آن‌ها 90° باشد.
- اگر دو خط موازی توسط خط قاطع قطع شوند، چهار زاویهٔ متبادلهٔ داخلی و چهار زاویهٔ متبادلهٔ خارجی را می‌سازند که دو به دو با هم مساوی اند.



زوایای متبادلهٔ خارجی $\left.\begin{matrix}\hat{2}=\hat{8}\\ \hat{1}=\hat{7}\end{matrix}\right\}$ زوایای متبادلهٔ داخلی $\left.\begin{matrix}\hat{3}=\hat{5}\\ \hat{4}=\hat{6}\end{matrix}\right\}$

- اگر دو خط مستقیم توسط یک خط مستقیم طوری قطع شوند که زاویه‌های متبادلهٔ مساوی را بسازند، این دو خط با هم موازی اند.
- اگر دو خط موازی توسط یک خط مستقیم قطع شوند 8 زاویهٔ متوافقهٔ مساوی را می‌سازند که دو به دو با هم مساوی اند.

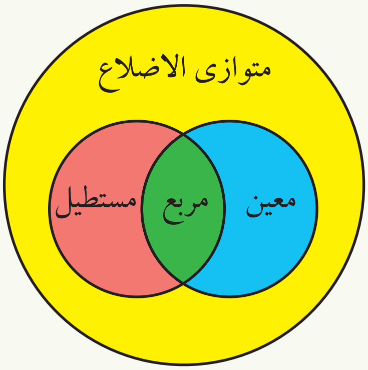
$$\hat{1}=\hat{5} \qquad \hat{2}=\hat{6}$$

$$\hat{4}=\hat{8} \qquad \hat{3}=\hat{7}$$

- اگر دو خط مستقیم توسط یک خط طوری قطع شوند که زاویه‌های متوافقهٔ مساوی را بسازند، این دو خط با هم موازی اند.
- اگر دو خط مستقیم موازی توسط یک خط مستقیم قطع شوند، مجموع زوایای داخلی یک طرف خط قاطع مساوی به 180° می‌باشد.
- اگر دو خط مستقیم توسط یک خط طوری قطع شوند که مجموع زوایای داخلی یک طرف خط قاطع 180° باشد، این دو خط با هم موازی اند.
- در یک متوازی‌الاضلاع زوایای مقابل آن، دو به دو با هم مساوی می‌باشند.
- قطرهای متوازی‌الاضلاع یکدیگر را نصف کرده و از تقاطع آن‌ها دو جوره مثلث انطباق

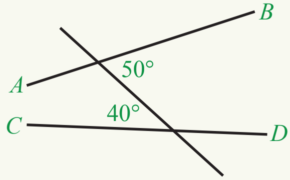
پذیر تشکیل می شوند.

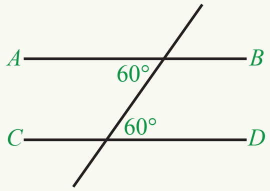
- در مستطیل قطرها با هم مساوی اند و یکدیگر را تنصیف نموده، از تقاطع قطرها دو جوره مثلث انطباق‌پذیر تشکیل می‌شوند و هر چهار زاویهٔ مستطیل قایمه می‌باشند.
- چهار ضلع معین(لوزی) با هم مساوی اند، قطرها بر هم عمود اند و یکدیگر را نصف می کنند و از تقاطع آن‌ها چهار مثلث انطباق‌پذیر تشکیل می‌شوند. همچنین قطرها زاویهٔ رأس را نصف می کنند.
- قطرهای مربع با هم مساوی اند، بر یک دیگر عمود اند و یک دیگر را نصف می کنند. قطرهای مربع، زاویهٔ رأس را نصف می کنند و از تقاطع آن‌ها چهار مثلث انطباق پذیر تشکیل می شوند.
- مجموع چهار زاویهٔ داخلی یک چهارضلعی 360° می‌باشد و مجموع چهار زاویهٔ خارجی یک چهارضلعی نیز 360° است.
- تقاطع خاصیت‌های متوازی‌الاضلاع، مستطیل، معین(لوزی) و مربع در دیاگرام وین توسط تقاطع ست‌ها نشان داده شده است.

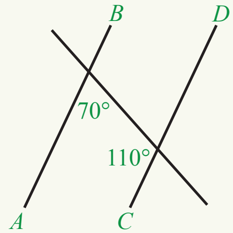


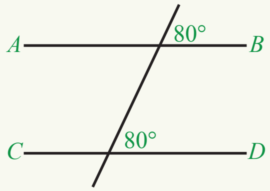
تمرینات فصل ششم

1- در کدام یک از اشکال زیر، دو قطعه‌خط AB و CD موازی اند؟

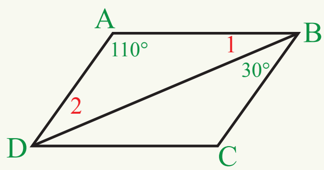


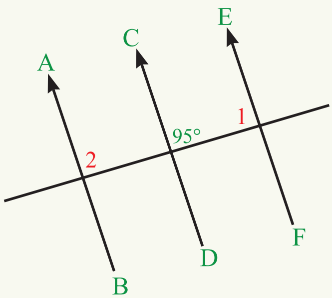




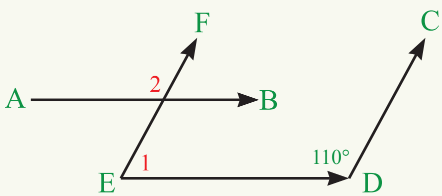


2- در اشکال زیر اگر $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ و $\overline{CD} \parallel \overline{EF}$ باشد، زوایای $\hat{1}$ و $\hat{2}$ چند درجه می‌باشند؟





3- در شکل زیر اگر $\overline{ED} \parallel \overline{AB}$ و $\overline{CD} \parallel \overline{FE}$ باشد، زوایای $\hat{1}$ و $\hat{2}$ را دریابید.



4- هر خاصیتی که چهارضلعی‌ها دارند، در مقابل آن علامت ✓ را بگذارید.

خاصیت‌ها	متوازی‌الاضلاع	مستطیل	لوزی	مربع
قطرها یکدیگر را نصف می کنند				
قطرها با هم مساوی اند.				
قطرها بر هم عمود اند.				
قطرها زوایای رأس را نصف می کنند.				
از تقاطع قطرها دو جوره مثلث انطباق‌پذیر تشکیل می‌شوند.				
از تقاطع قطرها، چهار مثلث انطباق پذیر تشکیل می‌شوند.				
اضلاع مقابل مساوی و موازی اند.				
تمام اضلاع مساوی اند.				
زوایای مقابل مساوی اند.				
هر چهار زاویه با هم مساوی اند.				

5- جواب درست را انتخاب کنید:

وقتی که از تقاطع دو خط مستقیم با یک قاطع زاویه‌های متبادلۀ مساوی تشکیل شود، این دو خط با هم:

a) عمود اند. b) موازی اند. c) متقاطع اند.

دو زاویه‌یی که اضلاع‌شان موازی و هم‌جهت یا موازی و مختلف‌الجهت باشند:

a) مساوی اند. b) متمم یکدیگر اند. c) مجموع این دو زاویه 90° می‌شود.

دو زاویه‌یی که دو ضلع آن‌ها موازی و هم‌جهت و دو ضلع آن‌ها موازی و مختلف‌الجهت باشند:

a) مجموع آن‌ها 180° می‌شود. b) مجموع آن‌ها 90° می‌شود. c) با هم مساوی اند.

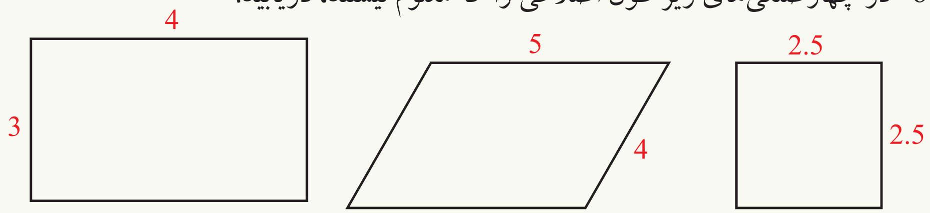
دو خط مستقیم عمود بر یک خط، با هم:

a) موازی اند.　　　　b) عمود اند.　　　　c) متقاطع اند.

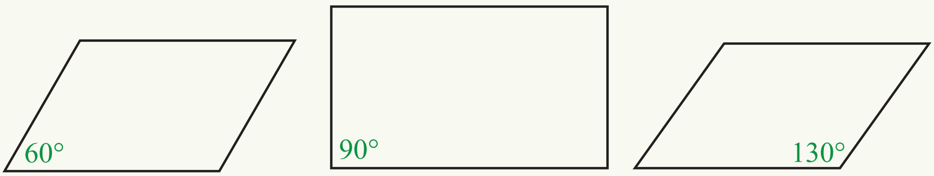
اگر دو خط مستقیم توسط یک خط طوری قطع شوند که مجموع دو زاویهٔ داخلی یک طرف خط قاطع 180° شود، این دو خط با هم:

a) موازی اند.　　　　b) عمود اند.　　　　c) متقاطع اند.

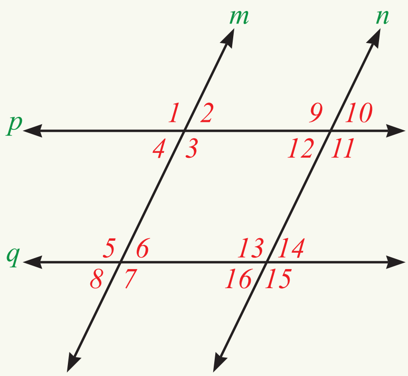
6- در چهارضلعی‌های زیر طول اضلاعی را که معلوم نیستند، دریابید:



7- اندازهٔ سه زاویهٔ دیگر چهارضلعی‌های زیر را به دست آورید:



8- در شکل $p \| q$ و $m \| n$ است؛ اگر $\hat{2} = 40^\circ$ باشد، اندازهٔ زاویه‌های متباقی چند درجه می‌باشد؟



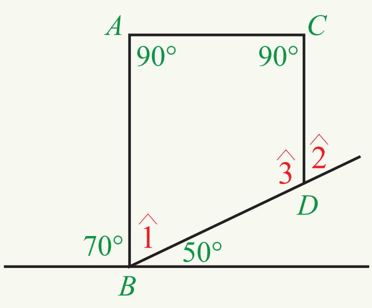
9- در بین جمله‌های زیر کدام‌ها درست و کدام‌ها نادرست اند؟

- قطرهای متوازی‌الاضلاع با هم مساوی اند.
- قطرهای مربع بر یکدیگر عمود اند.
- قطرهای معین (لوزی) یکدیگر را نصف می کنند.
- هر چهار زاویهٔ معین (لوزی) قایمه می‌باشند.
- اضلاع مقابل یک متوازی‌الاضلاع دو به دو با هم مساوی و موازی اند.
- اضلاع مقابل یک ذوزنقه دو به دو موازی می‌باشند.
- هیچ گاه یک ذوزنقه متوازی‌الاضلاع شده نمی‌تواند.
- هر مستطیل یک چهارضلعی است.
- معین(لوزی) یک متوازی‌الاضلاع می‌باشد.
- مربع یگانه چهارضلعی یی است که هر چهار زاویهٔ آن قایمه می‌باشند.
- اگر مجموع سه زاویهٔ یک چهارضلعی $300°$ باشد، زاویهٔ چهارم آن $60°$ است.
- مجموع زوایای خارجی یک چهارضلعی $360°$ می‌باشد.
- مجموع زوایای داخلی یک چهارضلعی $360°$ می‌باشد.
- قطرهای یک متوازی‌الاضلاع بر هم عمود اند.
- از تقاطع قطرهای مستطیل، چهار مثلث انطباق‌پذیر تشکیل می‌شود.
- از تقاطع قطرهای معین(لوزی) چهار مثلث انطباق‌پذیر تشکیل می‌شود.
- قطرهای مستطیل یکدیگر را نصف می کنند.
- قطرهای معین برهمدیگر عمود اند.

10- اگر یک زاویهٔ متوازی‌الاضلاع قایمه باشد، نشان دهید که سه زاویهٔ دیگر آن نیز قایمه می‌باشند.

11- اگر یک زاویهٔ متوازی‌الاضلاع $55°$ باشد، سه زاویهٔ دیگر این متوازی‌الاضلاع را دریابید.

12- در شکل زیر $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ می‌باشد؛ $\hat{1}$، $\hat{2}$ و $\hat{3}$ را دریابید.



فصل هفتم

احصائیه

احصائیه، روشن گر اطلاعات اطراف ما می‌باشد.



روش‌های جمع آوری اطلاعات



مدیر مکتب شما می خواهد یک برنامهٔ تفریحی را برای شما تهیه کند.
اگر شما به جای مدیر مکتب باشید چه اطلاعاتی را باید کسب کنید؟

فعالیت

مدیر مکتب از شما خواسته است که اطلاعاتی از هم‌صنفی‌های خود جمع آوری کنید و در اختیار او قرار دهید تا بتواند یک برنامهٔ تفریحی برای شما تهیه کند.

1- از 5 نفر از هم‌صنفی‌های خود سؤالات زیر را بپرسید:

- چه نوع ورزشی را دوست دارید؟
- چند ساعت در هفته می‌خواهید ورزش کنید؟
- آیاحاضر استید در روز رخصتی برای ورزش کردن به مکتب بیایید؟

2- چه فکر می کنید اطلاعات بالا را بهتر است که با پرسیدن شفاهی از هم صنفی‌های خود به دست آورید یا سؤالات را برای آن‌ها بنویسید و آن‌ها پاسخ بگویند؟

- پرسیدن شفاهی با پرسیدن کتبی چه فرقی می کند؟
- می خواهید بفهمید که کدام هم‌صنفی شما بازی والیبال را بلد است؟

– آیا از او می‌پرسید؟

–آیا ترجیح می‌دهید که بازی او را تماشا کنید؟

- دو روش بالا چه فرقی با هم دارند؟ کدام یک بهتر است؟
- برای انتخاب تیم بسکتبال، قد هم‌صنفی های خود را اندازه بگیرید.
- آیا روش دیگری برای پیدا کردن اندازهٔ قد آن‌ها وجود دارد؟

اطلاعات خود را در یک ورق بنویسید و به معلم بدهید.

وقتی که برای جمع آوری اطلاعات، سؤال می کنید، سؤال را می توانید به شکل شفاهی یا کتبی بپرسید. برخی اوقات بهتر است سؤال نکنیم؛ در این مورد به مشاهده آن بپردازیم تا اطلاعات بهتر به دست آوریم و بعضی اوقات باید آزمایشی را انجام دهیم تا اطلاعات را جمع آوری نماییم.

برخی از روش‌های جمع‌آوری اطلاعات عبارت از جمع‌آوری معلومات از طریق پرسش (شفاهی یا کتبی)، مشاهده و آزمایش اند.

مثال:

1- اگر بخواهیم درآمد یک خانواده را بدانیم، از چه روشی بهتر است اطلاعات را جمع آوری نماییم یا از اطلاعاتی که از قبل ثبت شده، استفاده نماییم؟

2- اگر بخواهیم نمرهٔ ریاضی شاگردان صنف ششم را بررسی نماییم، از چه روشی بهتر است اطلاعات را جمع آوری نماییم؟

3- اگر بخواهیم تعداد خواهران و برادران شاگردان را بدانیم از چه روشی اطلاعات را جمع‌آوری کنیم؟

4- اگر بخواهیم وزن نوزادان را بررسی کنیم، از چه روشی بهتر است اطلاعات را جمع‌آوری نماییم؟

حل

در مثال 1 هرگاه در آمد کم باشد، ممکن است شاگردان خوش نداشته باشند که معلومات دهند؛ پس بهتر است بدون نام از آن‌ها بپرسیم.

در مثال (2) ممکن است شاگردان نمرهٔ واقعی خود را نگویند، بهتر است از دفاتر ثبت شده استفاده کنیم.

در مثال (3) می‌توانیم از پرسش شفاهی یا کتبی استفاده کنیم.

در مثال (4) باید وزن نوزادان را اندازه‌گیری نماییم.

تمرین

1- اگر شما بخواهید تعداد اشخاص با سواد محل تان را بدانید از چه روشی باید استفاده کنید؟

2- اگر شما بخواهید تعداد شاگردان مکتب خود را بیابید، از چه روشی باید استفاده کنید؟

3- اگر شما بخواهید رفتار حیوانات را در شب بررسی کنید، از چه روشی باید استفاده کنید؟

4- دو موضوع بررسی برای هر یک از روش‌های جمع‌آوری اطلاعات بیان کنید.

- پرسش شفاهی (مصاحبه)
- پرسش کتبی
- مشاهده

جامعه و نمونه(Population and sample)



آیا یک مشت برنج نمونه یی از یک بوجی برنج شده می تواند؟

فعالیت

وزارت معارف می‌خواهد نظر معلمان را در مورد کافی بودن تعداد ساعت‌های درسی مضمون ریاضی بررسی کند.

- فکر می کنید، از چه کسانی باید سؤال شود؟
- آیا از معلمان صنف خاصی باید سؤال صورت گیرد؟
- چه فکر می کنید؛ اگر بخواهیم از همهٔ معلمان مربوطه سؤال کنیم، چه مشکلاتی وجود خواهد داشت؟
- آیا کافی است تا از یک بخشی از معلمان سؤال کنیم؟
- آیا کافی است تا این بخش را فقط از معلمان صنف هفتم انتخاب کنیم؟

درفعالیت بالا معلمان ریاضی، افرادی استند که از آن‌ها باید سؤال شود؛ ولی لزومی ندارد که از معلم اجتماعیات سؤال شود.

دریک بررسی، همهٔ افراد و اشیایی که از آن‌ها اطلاعات مورد نیاز را دریافت می کنیم، جامعه می‌نامیم؛ اگر اطلاعات را از همهٔ اعضای جامعه به دست آوریم، این عمل را رأی‌پرسی همگانی می گویند. برخی اوقات به دلیل مشکلاتی چون کمبود وقت، مشکلات اقتصادی، امکان نداشتن دسترسی به همهٔ افراد جامعه مجبور استیم فقط اطلاعات بخشی از اعضای جامعه را به دست آوریم.

نمونه، بخشی از اعضای جامعه است. نمونه‌یی از یک جامعه، باید خاصیت و صفات کُل جامعه را داشته باشد.

مثال: مثال‌هایی از جامعه و موضوع مورد بررسی آن‌ها به صورت زیر است:

- معلمان ولایت هرات .... سابقهٔ تدریس معلمان در هرات
- محصول پنبهٔ سمت شمال .... میزان تولید پنبه
- محصولات زراعتی افغانستان .... انواع محصولات افغانستان

2- مثال‌هایی از نمونه به صورت زیر است :

- یک مشت برنج، نمونه‌یی از یک بوجی برنج است.
- شاگردان صنف هفتم مکتب شما نمونه‌یی از شاگردان صنف هفتم افغانستان استند .
- معلمان ریاضی کندز، نمونه‌یی از معلمان کندز است.
- گندم نمونه‌یی از محصولات زراعتی افغانستان است.

تمرین

1- در موضوع‌های بررسی زیر جامعهٔ آن‌ها را تعیین کنید:

- میزان تحصیلات اعضای خانوادهٔ شما.
- تعداد خواهران و برادران شاگردان صنف شما.
- ساعات کار دکتوران شفاخانهٔ علی‌آباد.
- مدت زمان عبور موترها از یک سرک.

2- در کدام حالت از سرشماری و درکدام حالت از نمونه‌گیری برای جمع‌آوری اطلاعات استفاده می کنیم؟

- پیدا کردن جمعیت افغانستان.
- میزان علاقهٔ کودکان 5 ساله به فوتبال.
- وزن متوسط یک گوسفند 2 ساله.
- نمرهٔ ریاضی شاگردان صنف هفتم برای درجه بندی .
- قابلیت نوشیدن آب یک چاه.
- رضایت مشتریان از محصولات یک کارخانه.
- احصائیه‌گیری تعداد فرزندان هر خانواده در شهر کابل.

نمونهٔ تصادفی



در ایـن کارتـن نام‌های شـاگردان صنف هفتم در پارچه‌های کاغذ نوشـته شده اند؛ اگر بـرای انتخاب اعضای تیم باسـکتبال، این شـاگرد نام‌های پنج نفـر را از کارتن بیرون کنـد، آیا این یک نمونـهٔ تصادفی شده می‌تواند؟

فعالیت

می‌خواهیم قد شاگردان صنف دهم ولایت شما را اندازه بگیریم:

- آیا می‌توانیم بلندی قد همهٔ شاگردان صنف دهم ولایت شما را تعیین کنیم؟
- آیا اعضای تیم باسکتبال صنف دهم ولایت شما را می‌توانیم برای این بررسی انتخاب کنیم؟ چرا؟
- به عنوان نمونهٔ صنف دهم مکتب خود را در نظر بگیرید، 6 نفر از آن‌ها را به ترتیب الفبای نام شان انتخاب کنید. آیا این نمونه می‌تواند نشان‌دهندهٔ قد شاگردان صنف دهم مکتب شما باشد؟
- آیا این نمونه می‌تواند نمونهٔ قد تمام شاگردان صنف دهم ولایت شما باشد؟

در فعالیت بالا نمونهٔ انتخاب شده در تیم باسکتبال یک نمونهٔ تصادفی نیست؛ زیرا از قبل می‌توانیم حدس بزنیم همهٔ آن‌ها قد بلند اند؛ ولی نمونهٔ انتخاب با حروف الفبای نام شان یک نمونهٔ تصادفی است؛ زیرا نام شاگردان به قد آن‌ها مربوط نمی‌باشد و اگر از قبل شاگردان را نشناسیم نمی‌توانیم با دانستن نام آن‌ها قد شان را حدس بزنیم.

برای آن که یک نمونه، نشان‌دهندهٔ یک جامعه و دارای خصوصیات جامعه باشد، باید خصوصیات زیر را داشته باشد:

- امکان انتخاب هر فرد و یا شی به عنوان عضوی از نمونه امکان‌پذیر باشد.
- قبل از انتخاب نمونه نتوانیم در بارهٔ اعضای نمونه قضاوت کنیم.
- تمام اعضای جامعه به عنوان یک نمونه سهم برابر داشته باشند.

مثال: کدام یک از نمونه‌های زیر یک نمونهٔ تصادفی است؟

– موضوع بررسی: سواد اهالی شهر.

– جامعه : اهالی شهر .

– نمونهٔ اول: هر فردی که ساعت 5 بعد از ظهر از سرک عبور کند.

– نمونهٔ دوم: دکتوران یک شفاخانه.

حل:

– نمونهٔ اول یک نمونهٔ تصادفی است؛ زیرا از قبل سواد افرادی که از سرک می‌گذرند را نمی‌توان پیش‌بینی کرد.

– نمونهٔ دوم یک نمونهٔ غیرتصادفی است؛ زیرا از قبل می‌توان نتیجه را پیش‌بینی کرد و این نمونه نشان دهندهٔ همه جامعه نیست.

تمرین

1– در هر یک از بررسی‌های زیر، علت مناسب بودن یا مناسب نبودن نمونه‌ها را بیان کنید.

- موضوع: رضایت مشتریان از محصولات یک کارخانه.
  نمونه: خانوادهٔ کارگران کارخانه.
- موضوع: مطالعهٔ تعداد فرزندان هر خانواده در شهر .
  نمونه: ساکنین یکی از مناطق یک شهر که به گونهٔ تصادفی انتخاب شده باشند.

2– نام تمام هم‌صنفی‌های خود را روی کاغذهای کوچک نوشته و سپس به اساس قرعه 5 نفر را انتخاب کنید. آیا این یک نمونهٔ تصادفی است؟ چرا؟

متحول تصادفی و انواع آن



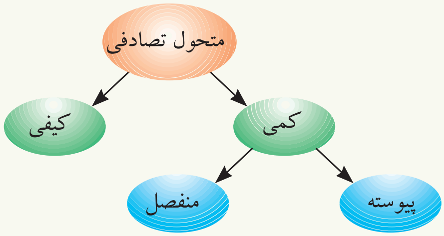
زلمی به بازار رفت و از دیدن رنگ‌های مختلف میوه‌ها شادمان شد. چند عدد کیله چند عدد بادرنگ و 2 کیلوگرام انگور خرید. طرز خریدن این میوه‌ها چه تفاوتی با هم دارند؟

فعالیت

- یک موضوع مورد بررسی را نام ببرید که اطلاعات پیرامون آن را می‌توانیم با اندازه‌گیری به دست آوریم.
- یک موضوع مورد بررسی را نام ببرید که برای پاسخ دادن به آن بتوان شمارش کرد.
- پاسخ‌های دو موضوع بالاچه تفاوتی با هم دارند؟
- یک موضوع مورد بررسی را نام ببرید که پاسخ‌های آن را نمی‌توانیم با عدد بیان کنیم.
- در هر یک از موارد بالا یک جامعه را بررسی و معرفی کنید.
- در مثال‌های بالا آیا اطلاعات در مورد موضوعی را می‌توان قبل از جمع‌آوری اطلاعات در مورد هر یک از اعضای جامعه پیش‌بینی کرد؟

اگر اطلاعات جمع آوری شده از موضوع مورد مطالعه از یک عضو جامعه به عضو دیگر قابل پیشبینی نباشد، موضوع را متحول تصادفی می‌نامیم.
برخی از اطلاعات را با عدد می‌توان بیان نمود.
این دسته از متحول‌ها را به نام متحول کمی یا عددی می‌نامیم؛ هرگاه در متحول کمّی نتوانیم بین دو واحد پشت سر هم عددی پیدا کنیم، آن را متحول کمی مجزا می‌نامیم.
اگر بین دو واحد پشت سر هم بتوانیم عددی را پیدا نماییم، آن متحول را متحول کمی پیوسته می‌نامیم.
در صورتی که اطلاعات را توصیف و بدون عدد بیان کنیم، متحول را متحول کیفی یا توصیفی می‌نامیم.

مطالب بالا را می‌توان به شکل زیر نشان داد:



مثال:

سه متحول تصادفی را نام بگیرید که بتوان با شمارش، سه متحول تصادفی را نام ببرید که بتوان با اندازه‌گیری و سه متحول تصادفی را نام ببرید که بتوان با توصیف در مورد آن‌ها سخن گفت.

کمّی مجزا	کمّی پیوسته	کیفی
تعداد اعضای خانوادهٔ تان	طول قد شاگردان	رنگ چشم شاگردان
تعداد صنف‌های مکتب	درجهٔ حرارت شهر شما	میزان سواد کارگران
تعداد موترهایی که از یک سرک می‌گذرند	وزن گوسفندان	موسیقی مورد علاقهٔ مردم

تمرین

1– متحول‌های تصادفی‌یی را نام ببرید که مربوط به سه نوع شکل ماده: مایع، جامد و گاز باشند.

2– آیا درجهٔ حرارت ولایت کابل در روزهای ماه جدی متحول‌های تصادفی می‌باشد؟ چرا؟ نوع آن را تعیین کنید.

3– آیا تعداد موترهایی که از پیش‌روی شما در ساعت هشت صبح می‌گذرد متحول تصادفی است؟ چرا؟ نوع آن را تعیین کنید.

4– کدام یک از متحول‌های زیر مجزا، پیوسته و کدام یک آن‌ها کیفی اند؟

- تعداد مکالمات تیلفونی یک اداره در یک روز.
- زمان مکالمات تیلفونی یک اداره.
- جنسیت شرکت کننده‌گان در یک مهمانی.
- تعداد نامه‌های یک صندوق.
- وضع سواد مردم یک ولایت.
- وزن نامه‌های موجود در یک صندوق.
- تعداد بیماران مراجعه کننده به یک شفاخانه در طول روز.
- میزان تحصیلات اهالی یک شهر (بکلوریا، لیسانس، ماستر، دکتور).
- حالت متأهل بودن کارمندان یک اداره.

جدول کثرت(Frequency Table)

در کلمۂ معلم چند مرتبه حرف "م" تکرار شده است؟



فعالیت

رنگ مورد علاقۂ 30 نفر از شاگردان مکتب شما را که همۂ به گونۂ تصادفی انتخاب شده بودند پرسیدیم. جواب آن‌ها قرار زیر است:

سبز	آبی	زرد	سرخ	سبز	سفید	آبی	سبز	زرد	سرخ
سرخ	زرد	سبز	آبی	آبی	سبز	زرد	سرخ	سفید	آبی
زرد	سرخ	زرد	آبی	آبی	سبز	آبی	سرخ	زرد	زرد

- آیا با یک نگاه سریع می‌توانید بگویید کدام رنگ بیشتر از همه یا کمتر از همه رنگ‌ها مورد علاقه واقع شده است؟
- با شمارش بگویید، تعداد افرادی که هر رنگ را انتخاب کرده اند چند است؟ جواب را در جاهای خالی بنویسید.
- جمع اعداد ستون راست چند است؟ این عدد چه چیزی را نشان می‌دهد؟
- اکنون با نگاه کردن به رنگ‌ها، آیا می‌توانید سریع‌تر به سؤال اول جواب دهید؟
- اگر ترتیب نوشتن رنگ‌ها را عوض کنیم، آیا جواب شما عوض می‌شود؟

رنگ	تعداد
آبی	
زرد	
سبز	
سفید	
سیاه	
سرخ	

در یک بررسی، داتاهای جمع‌آوری شده را که روی آن هیچ عملی انجام نشده باشد داتای خام می‌نامند. در هر بررسی با منظم کردن داتاها جدولی تشکیل نموده که آن را جدول کثرت می‌نامیم، در فعالیت فوق ستون چپ این جدول نشان‌دهندۂ داتاها و ستون راست این جدول نشان‌دهندۂ کثرت هر یک از این داتاها می‌باشد. برخی اوقات جدول را به شکل سطری ترتیب نموده و تعداد دفعاتی را که یک داتا تکرار شده است کثرت آن داتا می‌نامیم.

مجموع کثرت داتاها در یک نمونه برابر با کل داتاها یا تعداد اعضای نمونه می‌باشد؛ اگر f_1 کثرت دیتای اول، f_2 کثرت داتای دوم،... f_n کثرت داتای n-ام و تعداد کل داتاها مساوی به n باشد؛ پس:

$$n = f_1 + f_2 + ... + f_n$$

توجه: اطلاعات اولیهٔ جمع آوری شده را دایتا (Data) می گویند.

مثال:

یک شهر را به عنوان جامعه و چهل خانوادهٔ از این شهر را به عنوان نمونه انتخاب کرده؛ سپس از این خانواده‌ها تعداد اعضای شان را می‌پرسیم و داتاهای زیر را به دست می‌آوریم:

1	2	3	5	5	2	1	2	4	3
5	3	4	1	3	3	4	4	2	6
1	6	2	4	5	1	4	2	3	7
8	7	3	6	5	4	2	4	3	3

برای به دست آوردن معلومات بهتر، داتاهای بالا را به صورت منظم در جدول زیر خلاصه می کنیم. در این جدول سطر اول نوع خانواده از نظر جمعیت و سطر دوم تعداد خانواده‌ها را نشان می دهد:

تعداد اعضای هر خانواده	1	2	3	4	5	6	7	8	مجموع
تعداد خانواده‌ها	5	7	9	8	5	3	2	1	40

جدول بالانشان می‌دهد که پنج خانواده 1 نفر عضو و 8 خانواده 4 نفر عضو دارند و در بین خانواده‌ها فقط یک خانواده دارای 8 عضو است.

تمرین

1- از 20 نفر دوستان، فامیل یا همسایه‌گان خود بپرسید که به کدام یک از ورزش‌ها (فتبال، والیبال، باسکتبال و دوش) علاقه دارند. پاسخ‌ها را در یک جدول کثرت خلاصه کنید. کدام ورزش بیشتر از دیگر ورزش‌ها مورد علاقه است؟

2- جدول مقابل اوسط حرارت شهرهای مختلف را در ماه حمل بر حسب درجهٔ سانتی گرید نشان می‌دهد.
- کدام شهر در این ماه از همه سردتر است؟
- کدام شهر در این ماه از همه گرم‌تر است؟

نام شهر	اوسط درجهٔ حرارت
بلخ	20
بامیان	10
کندز	24
جلال آباد	25

گراف تصویری

اگر در ابتدای یک سرک علامت ⬅ را ببینید، چه پیامی به ذهن تان می رسد؟



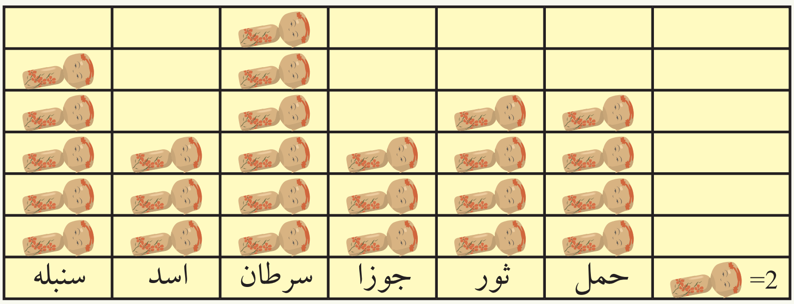
فعالیت

انسان‌های اولیه خواندن و نوشتن را نمی‌دانستند؛ اگر شما به جای انسان‌های اولیه می‌بودید برای بیان تعداد گوسفندان خود چه می کردید؟

- اگر یک گوسفند می‌داشتید؟
- اگر پنج گوسفند می‌داشتید؟
- اگر صد گوسفند می‌داشتید؟

از فعالیت بالا فهمیده می‌شود که برای دانستن اطلاعات می‌توانیم از سمبول‌ها و اشکال استفاده کنیم، این روش ارائه توسط تصویر را به نام گراف تصویری یاد می کنند. در صورتی که کثرت (فریکونسی) داده‌ها زیاد باشد، از مقیاس استفاده می کنیم.

مثال: یک هنرمند یک تعداد مجسمه را در مدت زمان شش ماه (حمل، ثور، جوزا، سرطان، اسد و سنبله) می‌سازد و آن‌ها را در یک قفسهٔ کارگاه خود، قرار شکل زیر جا به‌جا می کند:

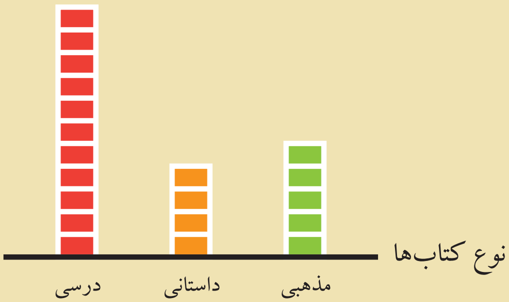


- در کدام ماه تعداد بیشتر مجسمه ساخته شده اند؟ چند تا؟
- در کدام ماه تعداد کمتر مجسمه ساخته شده اند؟ چند تا؟

حل: مقیاس «دو» است، پس هر علامت دو مجسمه را نشان می‌دهد، بیشترین مجسمه در ماه سرطان ساخته شده‌اند؛ زیرا $6 \times 2 = 12$ می‌شود و کمترین مجسمه در ماه جوزا و اسد ساخته شده اند؛ زیرا $3 \times 2 = 6$ است. گراف نشان می‌دهد که در ماه‌های جوزا و اسد به تعداد برابر مجسمه ساخته شده اند.

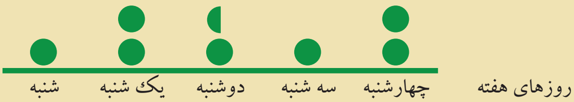
تمرین

1- خالد تعدادی از کتاب‌های خود را با گراف تصویری زیر نشان داده است.



- خالد از هر نوع کتاب چند تا دارد ؟
- از کدام نوع کتاب بیشتر دارد ؟

2- گراف زیر میزان مطالعهٔ خالد را در روزهای مختلف نشان می‌دهد.



3 ساعت = ●

- ● نشان‌دهندهٔ چیست؟ ◖ نشان‌دهندهٔ چیست؟
- خالد در هر روز چند ساعت مطالعه کرده است ؟

مُـــد(Mode)



فابریکه‌های تولید لباس، از بعضی رنگها بیشتر استفاده می کنند. فکر می کنید چرا؟

فعالیت

در یک ولایت که حدود دوصدوپنجاه هزار جمعیت دارد سه نفر می خواهند، برای عضویت در شورای ملی خود را کاندید نمایند، کسی که بیشترین رأی را کسب نماید عضو مجلس شورای ملی می گردد. در رأی گیری 150000 نفر شرکت کردند.

شما می خواهید بدانید که کدام یک از این کاندیدها عضویت شورای ملی را حاصل نموده است.

کاندید اول 30 فی‌صد آراء را از خود می کند.
کاندید دوم 50 فی‌صد آراء را از خود می کند.
کاندید سوم 20 فی‌صد آراء را از خود می کند.

- جدول کثرت برای تعداد رأی هر کاندیدا را تشکیل دهید.
- بیشترین تعداد رأی را چه کسی گرفته است؟ چند رأی گرفته است؟
- چه کسی وارد شورای ملی می‌شود؟
- آیا تفاوت رأی بین رای‌های دو کاندید دیگر، در انتخابات اثرگذار است؟

در فعالیت بالا دیدیم که می‌توان داتایی را یافت که بیشترین فریکونسی را دارد، داتایی که بیشترین کثرت داشته باشد Mode می‌نامیم. مد در بسیاری از موضوعات کاربرد دارد؛ مانند: رأی گیری‌ها، فروش کالاها و غیره.

مثال اول: نمرات مضمون ریاضی یک شاگرد صنف هفتم در طول شش سال گذشته برابر است با:

91 , 81.5 , 70 , 81 , 91 , 71

مد نمرات شاگرد را حساب کنید.
مد نمرات شاگرد عدد 91 است؛ زیرا بیشتر از بقیهٔ داتاها آمده است.
توجه: ممکن است یک مجموعه از اطلاعات داده شدهٔ یک یا بیشتر از یک مُد داشته باشد و یا هم هیچ مُد نداشته باشد.
مثال دوم: اطلاعات داده شدهٔ

1 , 1 , 2 , 3 , 4 , 2 , 5 , 7, 5 , 5

دارای سه مد 2، 1 و 5 است
همچنان اطلاعات داده شدهٔ

2 , 4 , 3 , 5 , 7

هیچ مد ندارد.

تمرین

1- مد اطلاعات داده شدهٔ زیر را در یافت کنید.
- 2 , 2 , 5 , 7 , 9 , 9 , 10 , 10 , 11 , 12 , 18
- 3 , 5 , 8 , 10 , 2 , 15 , 16
- 2 , 3 , 4 , 4 , 4 , 5 , 5 , 7 , 7 , 7

2- مُد را در ست‌های زیر دریافت کنید.

$A = \{17, 19, 19, 19, 21\}$

$B = \{1, 4, 10, 61\}$

$C = \{0, 9, 8, 5, 9, 10, 8\}$

3- نمرات سالانهٔ یک شاگرد در زیر داده شده است. مد آن را دریافت کنید.

دری	پشتو	انگلیسی	عربی	تعلیمات اسلامی	اجتماعیات	تربیت بدنی	هنر	ساینس	ریاضی
90	68	77	84	78	81	95	80	82	97

4- در یک مغازهٔ لباس، پنج نوع لباس به رنگ‌های سرخ، سبز، سیاه، سفید و آبی موجود است. از لباس سرخ 9، از لباس سبز 14، از لباس سیاه 12، از لباس سفید 8 و از لباس آبی 19دست به فروش رسیده است؛ بیش‌ترین لباس‌هایی که به فروش رسیده اند را تعیین کنید.

5- در گراف زیر محل تقریبی مد را مشخص کنید.



اوسط (Mean)

اوسط نمرات یک شاگرد 78 است و اوسط نمرات شاگرد دیگر 82 آیا می‌توان گفت که شاگرد دوم در تمام مضامین از شاگرد اول بهتر است؟

$$\frac{37+45+29}{3}=?$$

فعالیت

پرویز چهار روز متوالی کتاب خواند؛ روز اول 12 صفحه، روز دوم 14صفحه، روز سوم 13 صفحه و روز چهارم 11 صفحه؛ این اطلاعات با گراف زیر نشان داده شده است.



- پرویز چند صفحه خوانده است؟
- مربع‌های روی میله‌ها را طوری جابه‌جا کنید که هر چهار میله طول یکسان داشته باشند، شکل آن را رسم کنید.
- طول میله‌ها پس از برابری، مساوی به چند واحد است؟
- مجموع طول میله‌های برابر چقدر است؟ آیا این مجموع تفاوتی با مجموع صفحات خوانده شده دارد؟
- چطور می‌توانیم طول میله‌های برابر را با داشتن تعداد کل صفحات و تعداد روزها پیدا کنیم؟
- آیا پرویز می‌تواند بگوید که به طور اوسط هر روز چند صفحهٔ کتاب را خوانده است؟

از فعالیت بالا معلوم شد که اوسط چند عدد را می‌توانیم با تقسیم حاصل جمع اعداد بر تعداد عددها پیدا کنیم. اگر به تعداد n دیتا داشته باشیم و آن‌ها را با x_1 و x_2 و....x_n نشان دهیم و اوسط را به $\overline{X}$ داریم:

$$\overline{X}=\frac{x_1+x_2+.....+x_n}{n}$$

مثال: نمره‌های نازو و زرغونه در پایان سال گذشته در مضمون‌های مختلف به صورت زیر است:

مضمون	ریاضی	ساینس	دری	پشتو	عربی	تعلیمات‌اسلامی	هنرها	تربیت‌بدنی	انگلیسی	علوم‌اجتماعی
زرغونه:	78	78	85	87	79	90	70	85	91	86
نازو:	86	89	85	88	91	79	89	90	73	92

بادیدن نمرات، آیا می‌توانید بگویید کدام شاگرد، بیشتر درس خوانده است؟
باپید اکردن اوسط نمرات ابراز نظر کنید.
اگر مکتب به زرغونه دوباره فرصت دهد تا اوسط خود را بهتربسازد، فکر می‌کنید که کدام مضمون را باید دوباره امتحان دهد؟
برای آن که اوسط نمرات زرغونه به 85 برسد، در مضمون هنرها چه نمره‌یی باید بگیرد؟
آیا امکان دارد که اوسط او به 90 برسد؟

حل:

اوسط نمرات زرغونه $= \frac{86+91+85+70+90+79+87+85+78+78}{10} = \frac{829}{10} = 82.9$

اوسط نمرات نازو $= \frac{92+73+90+89+79+91+88+85+89+86}{10} = \frac{862}{10} = 86.2$

نمره‌یی را که زرغونه در امتحان مجدد در مضمون هنرها باید به دست آورد چنین پیدا می‌کنیم.

$$\frac{86+91+85+\square+90+79+87+85+78+78}{10} = 85$$

$$\square + 759 = 85 \cdot 10 = 850$$

$$\square = 850 - 759 = 91$$

پس برای آن که اوسط نمرات زرغونه 85 شود، او باید نمرۀ 91 را در مضمون هنرها به دست آورد.
برای آن که اوسط نمرات زرغونه 90 شود، چنین عمل می‌کنیم.

$$\frac{86+91+85+\square+90+79+87+85+78+78}{10} = 90$$

$$\square + 759 = 90 \times 10 = 900$$

$$\square = 900 - 759 = 141$$

کسب چنین نمره‌یی امکان ندارد؛ پس اوسط نمرات زرغونه با یک امتحان دیگر در مضمون هنرها هیچگاه 90 نمی‌شود.

تمرین

1– محصولات پنبهٔ سه مزرعه در پنج سال گذشته به صورت زیر بوده است. (عددها برحسب تُن است.)

مزرعهٔ اول:	8	20	13	15	12
مزرعهٔ دوم:	13	7	18	17	11
مزرعهٔ سوم:	10	11	8	9	18

- اوسط محصول پنبهٔ هر مزرعه را در پنج سال گذشته پیدا کنید.
کدام مزرعه به طور متوسط تولید بیشتری داشته است؟

2– درآمد ماهانهٔ 6 نفر از اعضای یک خانواده قرار زیر است:
5000 افغانی، 10000 افغانی، 8000 افغانی، 5000 افغانی، 15000 افغانی و 3500 افغانی

- مجموعهٔ درآمد این خانواده را پیدا کنید.
- اوسط درآمد ماهوار این خانواده را پیدا کنید.

3– سن بازیکنان تیم ملی فوتبال به شرح زیر است:

22	23	18	31	19	29	26	26	24	27
21	31	33	25	25	29	23	27	26	25
								25	26

- اوسط سن بازیکنان تیم را به دست آورید.
- تعداد بازیکنانی که سن آن‌ها بالاتر از اوسط. و همچنان تعداد بازیکنانی که سن آن‌ها کمتر از اوسط است را تعیین کنید.

4– اوسط 9 عدد 3،8،5،9،3،7،8،a و 4 برابر 5.5 است؛ a را پیدا کنید.

5- نمرات امتحان سالانۀ احمد و حامد در جدول زیر داده شده اند:

مضمون	ریاضی	ساینس	عربی	انگلیسی	دری	پشتو	علوم اجتماعی	تربیت بدنی	هنر ها	تعلیمات اسلامی
احمد	73	71	76	86	93	75	82	85	62	92
حامد	85	65	76	82	94	78	66	93	91	82

- اوسط نمرات هر کدام را حساب کنید.
- با مقایسۀ اوسط نمرات آن‌ها بگویید که: کدام یک بیشتر نمره گرفته است؟

خلاصه فصل هفتم

- اطلاعات جمع‌آوری شده را دیتا می گویند.

– روش‌های جمع‌آوری اطلاعات عبارت اند از:

– پرسش (شفاهی یا کتبی) مشاهده، انجام آزمایش و استفاده از اطلاعات ثبت شده.

- جامعهٔ احصائیه‌یی یا به طور خلاصه جامعه، مجموعه‌یی از افراد و اشیایی است که در بارهٔ اعضای آن اطلاعات مورد نیاز را دریافت می کنیم.

- بخشی از جامعه را نمونه می گویند.

– تعداد اعضای جامعه اندازهٔ جامعه و تعداد اعضای نمونه را اندازهٔ نمونهٔ می‌نامند.

- برای شناخت جامعه، نمونه‌یی را که از آن جامعه انتخاب می کنیم، باید نمونهٔ تصادفی باشد، شرط‌های انتخاب نمونه قرار زیر اند:

– انتخاب هر فرد به عنوان عضوی از نمونه امکان پذیر باشد.

– پیش از انتخاب یک نمونه باید نتوانیم دربارهٔ مشخصات آن قضاوت کنیم.

- اطلاعات جمع‌آوری شده در بارهٔ یک موضوع را متحول‌های تصادفی می گویند.

- متحول‌های تصادفی دو نوع اند:

– کمّی یا عددی که قابل اندازه‌گیری اند.

– کیفی یا غیر عددی که قابل اندازه‌گیری نمی‌باشند.

- متحول‌های کمّی دو نوع اند:

– پیوسته، که بین هر دو مقدار آن می‌توان مقدار دیگر را دریافت کرد.

– مجزا، که پیوسته نباشد.

- اگر $x_1, x_2, \dots, x_n$ تعداد دیتای یک موضوع باشند، تعداد دفعاتی که یک دیتا تکرار می‌شود به نام کثرت آن دیتایاد می‌شود و معمولاً آن را به $f_1, f_2, \dots, f_n$ نشان می‌دهند.

- گاهی برای دانستن اطلاعات داده شده از سمبول‌ها و اشکال استفاده می کنند که این ارائه توسط تصویر را به نام گراف تصویری یاد می کنند.

- مُد دیتایی است که بیش‌ترین کثرت را داشته باشد.

- اوسط دیتا را می‌توان از تقسیم حاصل جمع دیتا بر تعداد دیتا به دست آورد.

تمرین فصل هفتم

1- موضوعات زیر را در نظر گرفته و دربارهٔ بهترین روش جمع‌آوری داده‌ها برای آزمایش این فرضیه‌ها تصمیم بگیرید.

- بیش‌تر مردم فکر می‌کنند حد اکثر سرعت در دستگاه ها باید معین باشد.
- در زمان مطالعه گوش دادن به موسیقی به یادگیری کمک می‌کند.
- رژیم گرفتن موجب کاهش هوش می‌شود.

2- اگر گفته شود که تعداد فرزندان خانواده‌ها در سال‌های قبل به طور اوسط 7 نفر بوده و اکنون 5 نفر است و از شما خواسته شود که یک نمونه 100 تایی را در نظر گرفته و درستی این موضوع را بررسی کنید، در این مطالعه، جامعه و نمونه را واضح سازید.

3- یک موضوع بررسی و جامعه‌یی را نام بگیرید که صنف شما نمونهٔ آن باشد.

4- یک موضوع بررسی و نمونه‌یی از جمعیت افغانستان را نام بگیرید.

5- جاهای خالی را پر کنید.

- اگر تمام افراد جامعه را مورد مطالعه قرار دهیم، می‌گوییم .... کرده ایم.
- نمونه مجموعهٔ .... از جامعه است.
- تعداد اعضای جامعه را .... جامعه می‌گویند.
- تعداد اعضای نمونه را .... نمونه می‌گویند.

6- متحول‌های تصادفی چند نوع اند؟

7- چهار نوع متحول تصادفی را نام ببرید و نوع هریک را از نظر کمّی و کیفی بودن تعیین کنید.

8- چهار نوع متحول کمّی را نام ببرید که دو تای آن‌ها پیوسته و دو تای آن‌ها مجزا باشند.

9- شش نوع متحول تصادفی را نام ببرید که سه‌تای آن‌ها قابل اندازه‌گیری و سه تای دیگر آن‌ها قابل اندازه‌گیری نباشند.

10- در جملهٔ «من متعلم صنف هفتم استم»

بیش‌ترین کثرت را کدام حرف دارد؟ تعداد آن را معین کنید.

11- طول قد یک گروه ده نفری برحسب سانتی متر قرار زیر داده شده است:

175	177	151	170	156
177	152	159	156	177

کثرت عدد 177 و عدد 159 را بنویسید.

12- 40 خانواده را از یک شهر به عنوان نمونه انتخاب کرده و آن‌ها را به سه دسته مانند جدول تقسیم کنید.

نوع خانواده	کم جمعیت	با جمعیت متوسط	پرجمعیت	جمع
تعداد خانواده	8	12	20	40

اعداد 8 ، 12 و 20 را به نام چه یاد می کنند؟

13- در باغ وحش پنج نوع ماهی قرار جدول زیر نگهداری می‌شوند.

نوع پنجم	نوع چهارم	نوع سوم	نوع دوم	نوع اول
110	70	120	80	100

اگر $\mapsto$ نشان‌دهندهٔ 10 ماهی باشد، گراف آن‌ها را رسم کنید.

14- مد دیتای زیر را حساب کنید.

5 , 15 , 4 , 0 , 12 , 15 , 6 , 50

15- اگر دیتاهای بالا را دو برابر کنیم، چه تأثیری در مقدار مد حاصل می‌شود؟

16- دیتای زیر، قد 20 شاگرد را بر حسب سانتی‌متر نشان می دهد.

137	155	139	150	155
132	130	160	135	141
151	150	142	144	158
156	146	138	140	141

- اوسط قد شاگردان یک صنف را حساب کنید.

- اگر در هر دیتا عدد 2 را ضرب کنیم، چه تغییری در اوسط وارد می‌شود؟
- اگر از هر یک دیتا 10 تا کم شود، چه تغییری در دیتا وارد می‌شود؟

17- اگر تعداد دیتا 20 و اوسط دیتا 8.5 باشد، مجموع دیتا را حساب کنید.

18- نمرات چهارونیم ماههٔ 5 شاگرد صنف ششم در جدول زیر داده شده است، بگویید که اوسط نمرات کدام شاگرد بیشتر است.

مضمون	ریاضی	ساینس	عربی	انگلیسی	پشتو	دری	تعلیمات اسلامی	هنر ها	تربیت بدنی	علوم اجتماعی
محمود	24	35	20	25	27	22	36	34	30	40
احمد	22	26	28	30	35	40	37	32	38	33
منصور	40	38	32	30	33	35	33	40	39	
خالد	40	30	20	35	38	34	22	27	30	
پژواک	35	38	39	40	35	26	28	40	35	

فصل هشتم

احتمالات



احتمال به ما کمک می کند که از طریق
پیش‌بینی حوادث، برای آیندهٔ ما برنامه‌ریزی
کنیم.

چانس

آیا فردا هم چانس باریدن باران وجود دارد؟



فعالیت

چانس وقوع رویدادهای زیر را بر اساس تجارب روزانه، با یکی از عبارت‌های "حتمی است"، "ممکن است" و "ناممکن است"جواب دهید، جواب تان را در خانه‌های خالی مقابل رویدادهای داده شدۀ زیر بنویسید.

- هر هم‌صنفی ما، روزانه یک گیلاس شیر می‌نوشد. (   )
- فیل پرواز می کند. (   )
- بازی با توپ فوتبال بالای بام خانه خطر ندارد. (   )
- آفتاب از شرق طلوع می کند. (   )
- نتیجۀ بالا انداختن سکه رو یا پشت(شیر یا خط) سکه است. (   )
- چانس به روی آمدن سکه برابر به $\frac{1}{2}$ است. (   )
- اگر سکه را بالا بیندازیم، دوباره پایین نمی‌آید. (   )
- به جای کلماتی که برای پاسخ‌ها به کار بردید کلمات مناسب دیگری بنویسید.

حتمی (   ) (   )

ممکن (   ) (   )

ناممکن (   ) (   )

از فعالیت صفحهٔ قبل نتیجهٔ زیر به دست می آید:

نتیجه: یک حادثه را می‌توان با سه درجهٔ «حتمی»، «ممکن» و «ناممکن» ویا با کلمات معادل آن‌ها؛ مانند: صد فیصد، شاید و هیچ، ارزیابی کرد و با کاربرد کلمهٔ «چانس» آن را پیش‌بینی نمود.

مثال: کلمات حتمی، ممکن، ناممکن، شاید، صد فیصد، و صفر فیصد را مقابل جمله های زیر در جاهای خالی مناسب بنویسید:

a) زمستان پس از خزان می آید. (حتمی، صد فیصد)
b) آفتاب در شمال غروب می کند. (ناممکن، صفر فیصد)
c) مرغ همسایه یک لنگ دارد. (ممکن، شاید)
d) از آسمان صاف همیشه ژاله می‌بارد. (ناممکن، صفر فیصد)
e) اطفال شیرینی را دوست ندارند. (ممکن، شاید)
f) یک توپ که به هوا پرتاپ شده باشد، به زمین بر می گردد. (حتمی، صد فیصد)

تمرین

برای کلمات حتمی، ممکن و ناممکن از زنده گی روزمرهٔ خود هر کدام مثال‌هایی دریافت کرده و در جاهای خالی بنویسید:

1- حتمی:
a) زمین به دور آفتاب می چرخد.
b) ....
c) ....

2- ممکن:
a) ممکن است شب به خاطر دیدن پدرکلانم بروم.
b) ....
c) ....

3- ناممکن:
a) شتر پرواز می کند.
b) ....
c) ....

احتمال (Probability)



زلمی به هم‌صنفی‌اش گفت:
«امروز بعد از ظهر پیش من بیا تا با هم فوتبال بازی کنیم.»
هم‌صنفی‌اش جواب داد: «ممکن است بیایم.»

فعالیت

از جریان فعالیت‌های روزمرهٔ خود با درجه‌های مختلف امکانات، با در نظر داشت فیصدی‌های داده شده مثال‌هایی بگویید که در آن‌ها فیصدی احتمال صورت گرفتن واقعه وجود داشته باشد.

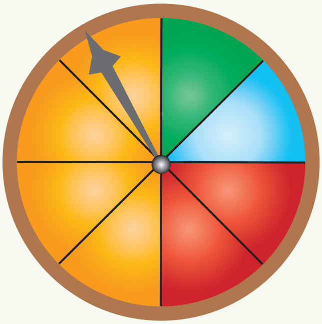
(95 فیصد)	1- 95% امکان دارد که فردا مکتب بیاییم.
(0 فیصد)	2- 0% بز پرواز می کند.
(10 فیصد)	3- ....
(50 فیصد)	4- ....
(20 فیصد)	5- ....
(75 فیصد)	6- ....
(80 فیصد)	7- ....
(99 فیصد)	8- ....
(100 فیصد)	9- ....
(1 فیصد)	10- ....

سؤال:
مثالی را که در فعالیت بالا برای شمارهٔ 5 آورده‌اید، به پهلوفَیل خود نشان داده و از او بپرسید که آیا او هم با شما موافق است که احتمال صورت گرفتن واقعه 20% است.
از فعالیت فوق نتیجهٔ زیر به دست می آید:

نتیجه:

برای پیش‌بینی احتمال وقوع یک اتفاق، یک واقعهٔ ناممکن را با 0% و احتمال یک واقعهٔ مطمئن یا امکان‌پذیر قطعی را با 100% یا 1 نشان می‌دهند.

احتمال وقوع واقعه‌های ممکن بین اعداد 0 و 1 واقع می‌گردد.



مثال 1: بازی چرخ طالع بجنگان را طوری در نظر می‌گیریم که قرار شکل ذیل با دوران عقربهٔ ساعتی بالای نواحی رنگه ایستاده می‌شود.

فیصدی احتمال واقعات زیر را طوری دریافت کنید که عقربه بعد از دوران بالای رنگ‌های زیر ایستاده شود.

1- احتمال این که بالای رنگ نارنجی ایستاده شود، 50% می‌باشد؛ زیرا:

$\frac{1}{2} = \frac{50}{100} = 50\%$ (نسبت مساحت رنگ نارنجی نظر به مساحت کل دایره)

2- احتمال این که بالای رنگ سرخ ایستاده شود (25%) می‌باشد؛ زیرا:

$\frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 25\%$ (نسبت مساحت رنگ سرخ نظر به مساحت کل دایره)

3- احتمال این که بالای رنگ سیاه ایستاده شود، (0%) می‌باشد؛ زیرا:

$0 = \frac{0}{100} = 0\%$ (نسبت مساحت رنگ سیاه در دایره وجود ندارد)

تمرین

شکل بازی چرخ طالع بجنگان را در نظر گرفته و احتمال رویدادهای زیر را دریافت کنید.

1- احتمال این که عقربه بالای رنگ آبی یا سبز ایستاده شود.

2- احتمال این که عقربه بالای رنگ زرد ایستاده شود.

3- احتمال‌های کدام رنگ‌ها با هم برابر اند؟

4- احتمال کدام رنگ دو چند احتمال رنگ دیگر است؟ قیمت‌های آن را دریافت کنید.

5- احتمال آمدن یکی از رنگ‌ها چند است؟

تجربه کردن یک اتفاق



برای آغاز مسابقهٔ والیبال از طرف راست میدان، داور یک سکه را میان دو تیم به هوا می‌اندازد.
می‌توانید بگویید که کدام یک از دو تیم والیبال اولین سرویس را از سمت راست انجام خواهد داد؟

فعالیت

یک سکه را چندین بار به هوا انداخته، نتایج به رُخ یا به پشت آمدن آن را درجدول زیر نوشته و احتمال واقعه را محاسبه کنید.(رخ= خط ، پشت = شیر)

شماره	مسؤول انجام تجربه	تعداد دفعات پرتاب سکه	تعداد آمدن رخ	احتمال
1	محمود	8 بار	3	$\frac{3}{8}$
2		15 بار		
3		20 بار		
4		25 بار		
5		40 بار		
6		20 بار		
7		30 بار		

از فعالیت بالا می‌توانیم دو نتیجهٔ زیر را بگیریم:

نتیجه:

1– بیان چانس وقوع یک حادثه توسط اعداد به نام «احتمال» یاد می‌شود.

2– در فعالیت بالا دیده شد که نتایج تجارب برای افراد مختلف متفاوت می‌باشند.

مثال: نتایج مسابقات تیم‌های ورزشی افغانستان در پنج سال اخیر نشان می‌دهد، که تیم تکواندوی دختران در مسابقات منطقه‌یی برنده نبوده اند؛ برای پیش‌بینی نتیجه در مسابقات منطقه‌یی امسال، به جمله‌های زیر با کلمات صحیح و یا غلط جواب دهید:

1– بر اساس نتایج سال‌های گذشته احتمال برنده‌شدن تیم دختران در مسابقات امسال چقدر است؟

جواب: چون تیم دختران در هیچ یک از 5 سال گذشته برنده نبوده است، احتمال برنده شدن امسال برابر است با: $\frac{0}{5}=0$

ولی چون در بیان احتمال، یک پیش‌بینی انجام می‌شود، این پیش‌بینی ممکن است صحیح نباشد، یعنی تیم دختران یا تیم پسران امسال امکان برنده شدن را نیز دارند.

- احتمال دارد تیم ورزشی دختران برنده شود. (   )
- احتمال دارد تیم ورزشی پسران برنده شود. (   )

تمرین

1– یک دانه رمل[1] را هشت بار انداختیم، سه بار عدد 1 آمد.
احتمال این‌که در پرتاب بار نهم شمارهٔ رمل 1 بیاید چقدر است؟

2– در یک مکتب حاضری روزانه هر صبح بالای لین گرفته می‌شود، دریافت کنید احتمال آن‌که امروز:

a) حاضری بالای لین گرفته شود.

b) حاضری بالای لین گرفته نشود.

۱– رمل: یک دانهٔ مکعبی است که دارای شش سطح برابر و در هر سطح شماره‌ها (خال‌ها) ·، ‥، ∴، ∷، ⁙ و ⠿ را دارا می‌باشد.

تجربهٔ تصادفی



آیا شاگردان صنف اول با سواد استند؟
گفته می‌توانید که یک نطاق تلویزیون باسواد یا بی‌سواد است؟
آیا هر باشندهٔ کوچه ما باسواد است؟

فعالیت

- اگر کنار یک سرک پر از ازدحام ترافیک ایستاده باشید، از همه اول‌تر انتظار عبور کدام نوع عراده را خواهید داشت؟
(لاری، سرویس، تیزرفتار، موترسایکل، بایسکل و یا گادی)
آیا گفته می‌توانید که:
- در یک ساعت چند عدد لاری از پیش روی تان خواهد گذشت؟
- چند موتر تیز رفتار از طرف راست به چپ در هر ساعت عبور خواهد کرد؟
- موتر بعدی کدام نوع خواهد بود؟
- فیل هم از پیش روی تان خواهد گذشت؟
- عبور فیل در جاده با حادثهٔ عبور لاری در سرک چه فرقی دارد؟
- آیا می‌توانید یک حادثهٔ تصادفی را قبل از وقوع پیش‌بینی کنید؟

از فعالیت بالا نتیجهٔ زیر را به دست می‌آوریم:

نتیجه:

یک حادثه که هنوز نتایج آن به صورت قطعی معلوم نشده و به صورت تصادفی اتفاق افتاده است تجربهٔ تصادفی یاد می‌شود.
برای حوادثی که تصادفی و یا اتفاقی نیستند، پیش‌بینی معنا ندارد.

مثال: برای انتخاب نمایندهٔ صنف از راه قرعه‌کشی، پنج تن از متعلمان علاقه‌مند (حسن، زلمی، خیبر، انور و زمری) نام‌های خود را در ورقه‌های کوچک کاغذی نوشته و داخل یک جعبه می‌اندازند.
از میان جعبه یک ورقه را که روی آن‌ها نام یکی از نامزدان نوشته شده، بی‌طرفانه بر می‌داریم.
این پروسه جمعاً یک تجربه تصادفی می‌باشد.
اما اگر پنج نفر نامزد نباشند و تنها یک نفر مثلاً: خیبر نامزد باشد، آیا می‌توان گفت که تجربه در این صورت نیز تصادفی است؟ نخیر؛ زیرا نتیجهٔ آن پیش از پیش معلوم است.

تمرین

1- آیا انداختن یک سکه که هر دو طرف آن یکسان است، می‌تواند یک تجربهٔ تصادفی باشد؟ اگر نه، چرا؟
2- انتخاب رئیس جمهور که توسط رأی مستقیم مردم به صورت سری صورت می گیرد می‌تواند یک تجربهٔ تصادفی باشد؟
3- دو نمونه از تجربهٔ تصادفی را از زنده گی روزمرهٔ خود بنویسید.
(a.................................
(b.................................
4- آیا گرفتن یک گلوله از یک جعبه که در آن 3 گلوله به رنگ سبز قرار دارند، می‌تواند یک تجربهٔ تصادفی باشد؟

فضای نتیجه و یا نمونه



نتیجه چه خواهد شد؟
شیر یا خط، کدام یک؟

فعالیت

- آیا پرتاب سکه یک تجربهٔ تصادفی است؟
- آیا می‌توان گفت که سکه خط خواهد آمد؟
- اگر سکه خط نیاید، چه خواهد آمد؟
- آیا غیر از دو حالت شیر و خط سکه، حالت سومی هم وجود دارد؟
- بگویید که تجربه چند نتیجهٔ ممکن دارد.
- نتایج ممکن انجام تجربهٔ تصادفی را داخل علامت ست (set) بنویسید.

بعد از انجام فعالیت بالا به نتیجهٔ زیر می‌رسیم:

نتیجه:

تمام نتایج ممکن یک تجربهٔ تصادفی را در یک مجموعه یا ست (Set) نشان داده می‌توانیم که به نام فضای نمونه یاد می‌شود. فضای نمونه را معمولاً به S نشان می‌دهیم.

هر عضو فضای نمونه، یک نتیجهٔ ممکن همان تجربهٔ تصادفی است که به نام حوادث اولیه یاد می گردند.

مثال: شکل مقابل انداختن یک تیر را از فاصلهٔ سه متری بالای یک صفحهٔ دایره‌یی نشان می‌دهد. دایره به چند ناحیهٔ مختلف تقسیم شده است؟

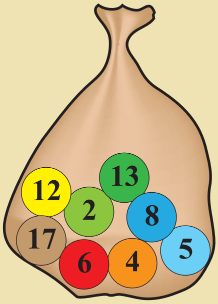


هرگاه تیر به شماره‌های داده شدهٔ 2، 1، 3 و 6 اصابت کند، همان شماره که تیر به آن اصابت کرده نتیجه است. **یادداشت:** اگر تیر خارج دایره اصابت کند به نتیجه نمرهٔ 0 داده می‌شود.
بنابر این تعداد نتایج ممکنه پنج عدد است که فضای نمونهٔ آن عبارت است از:

$$S = \{0, 1, 2, 3, 6\}$$

در شکل صفحهٔ قبل بعضی قسمت‌های دایره دو بار توسط یک عدد نشان داده شده است؛ مثلاً عدد 2. این مسأله چانس اصابت به ناحیهٔ 2 را بیشتر کرده؛ ولی دو نتیجه از هم متفاوت نمی‌باشند.

تمرین



1- خریطه‌یی را که قرار شکل مقابل داده شده است در نظر بگیرید. در داخل آن به تعداد 8 گلولهٔ یکسان که با اعداد مختلف نمره‌گذاری‌شده اند، قرار دارند؛ اگر از داخل آن چشم‌بسته، به صورت تصادفی یک گلوله برداشته شود، آیا امکان دارد که از خریطه، گلوله‌یی با شمارهٔ 50 بیرون آید؟

اگر نه؛ پس فضای نمونه و تعداد نتایج ممکن را ارائه کنید.

2- فضای نمونه و تعداد نتایج ممکن را برای انداختن یک دانهٔ رمل بنویسید.

احتمال نظری



حسن، زلمی، خیبر، انور و زمری برای نماینده گی صنف، خود را نامزد کرده بودند.
آیا احتمال دارد زلمی برنده شود؟
احتمال برد انور چقدر است؟

فعالیت

فضای تجربهٔ انداختن یک دانهٔ رمل را در نظر می گیریم، نتایج ممکنه عبارت اند از:



- فضای نمونهٔ تجربه را بنویسید.
- تعداد نتایج ممکنه چند است؟
- دیده می‌شود که آمدن شمارهٔ 2 یکی از 6 حالت ممکن دانهٔ رمل است، احتمال آن را با یک کسر بنویسید.
- آیا احتمال آمدن شمارهٔ 1 و شمارهٔ 2 رمل با هم برابر اند؟
- احتمال آمدن هر شمارهٔ رمل چند است؟
- چند شمارهٔ رمل جفت اند؟ احتمال آمدن شمارهٔ جفت را با یک کسر بنویسید.

در دریافت احتمال‌های حوادث فوق، ارقام صورت کسر تعداد حالات مساعد نتیجهٔ مورد نظر و یا مطلوب را نشان می‌دهد.
از حالات فوق می‌توان نتیجهٔ زیر را به دست آورد:

نتیجه:

احتمال یک نتیجه را می‌توان توسط کسر ذیل به دست آورد:

$$\text{احتمال وقوع یک نتیجه یا حادثهٔ اتفاقی} = \frac{\text{تعداد حالات مساعد برای وقوع حادثهٔ اتفاقی}}{\text{تعداد کل حالات نتیجه‌های تجربه}}$$

مثال: در تجربهٔ تصادفی، انداختن یک دانهٔ رمل را در نظر گرفته و احتمال حوادث زیر را دریافت کنید.

a) شمارهٔ دانهٔ رمل طاق باشد.

b) شمارهٔ دانهٔ رمل 5 باشد.

c) شمارهٔ دانهٔ رمل 8 باشد.

d) شمارهٔ دانهٔ رمل بزرگ‌تر از 1 یا مساوی به 1 باشد.

حل: می‌دانیم که تعداد کل حالات ممکن مساوی به 6 است؛ با در نظرداشت تعریف احتمال داریم:

a) حالات مساعد در این صورت 3 عدد بوده؛ بنابراین:

$$(\text{احتمال این که شماره رمل طاق باشد}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 50\%$$

b) حالات مساعد در این صورت مساوی به 1 بوده؛ پس:

$$(\text{احتمال این که شمارهٔ 5 باشد}) = \frac{1}{6} = 0.167 = 16.7\%$$

c) حالات مساعد در این صورت برای شمارهٔ 8 وجود ندارد؛ بنابراین:

$$(\text{احتمال این که شمارهٔ 8 باشد}) = \frac{0}{6} = 0 = 0\%$$

d) حالات مساعد برای این حالت 6 عدد بوده؛ بنابراین:

$$(\text{احتمال این که شماره بزرگ‌تر از 1 یا مساوی به 1 باشد}) = \frac{6}{6} = 1 = 100\%$$

تمرین

1- از بین 12 پسر و 6 دختر نمایندهٔ صنف‌های مختلف یک مکتب، یک تن به حیث نمایندهٔ عمومی متعلمین بر اساس قرعه انتخاب می گردد؛ احتمال این که:

a) نمایندهٔ عمومی شاگردان، یک دختر باشد.

b) نمایندهٔ عمومی شاگردان، یک پسر باشد.

2- در بین یک جعبه سه عدد گلوله به رنگ سبز، دو عدد به رنگ زرد و یک عدد به رنگ سرخ قرار دارد؛ اگر به صورت اتفاقی از بین جعبه یک گلوله برداریم، احتمال حوادث زیر را دریافت کنید.

a) احتمال آن‌که رنگ گلوله سبز باشد.

b) احتمال آن‌که رنگ گلوله زرد باشد.

c) احتمال آن‌که رنگ گلوله سیاه باشد.

3- در انداختن تجربهٔ تصادفی یک سکه، احتمال حوادث ذیل را به دست آورید:

a) سکه به رو بیاید.

b) سکه نه به رو و نه به پشت بیاید.

چانس: در پیش‌بینی حوادثی که از نگاه عددی قابل اندازه نباشند، از کلمهٔ چانس استفاده می‌گردد. کلمات: امکان دارد، ممکن نیست، حتمی است، چانس کمتر، چانس بیشتر و چانس ندارد برای پیش‌بینی یک اتفاق به کار برده می‌شوند؛ مثلاً:

1- چانس طی نمودن فاصلهٔ هرات - لغمان با موتر در یک ساعت، ناممکن است.

2- چانس آمدن روز بعد از هر شب به رضای خداوند(ج) حتمی و صد فیصد است.

3- چانس باریدن باران در تابستان نیز ممکن است.

احتمال: اگر چانس یک اتفاق با اعداد و ارقام پیش‌بینی گردد، به نام احتمال حادثهٔ اتفاقی یاد می‌شود.

احتمال یک واقعهٔ ناممکن 0 و احتمال یک حادثهٔ مطمئن 1 است؛ مثلاً:

1- احتمال این که مدیر یک لیسه بی سواد باشد، 0 است.

2- احتمال این که آفتاب از شرق طلوع کند، 1 است.

حادثهٔ اتفاقی: به تجربه‌یی که نتیجهٔ ممکنهٔ آن هنگام اجرا معلوم نباشد، حادثهٔ اتفاقی می‌گویند. مثلاً:

1- آیا می‌توان پیش‌بینی کرد که برندهٔ نمرات عالی کانکور امسال یک دختر باشد؟

2- آیا می‌توان پیش‌بینی کرد که زمستان امسال با خانواده به جلال‌آباد می‌رویم؟

تجربهٔ تصادفی: یک فعالیت که تا هنوز نتایج آن معلوم نباشد و یا حادثه یی که به صورت تصادفی اتفاق افتد، به نام تجربهٔ تصادفی یاد می‌گردد؛ مثلاً:

انتخاب نمایندهٔ صنف از میان چند نامزد توسط قرعه یک تجربهٔ تصادفی است.

یا انداختن یک سکه که نتیجهٔ آن به رو یا پشت قرار گرفتن سکه منجر می‌شود نیز یک تجربهٔ تصادفی است.

احتمال تجربی: احتمالی‌که توسط انجام تجربه به شکل عملی یا از روی تعداد نتایج یک تجربه به دست می‌آید، به نام احتمال تجربی یاد می گردد.

احتمال نظری: احتمالی که از روی فضای نمونه، نسبت حالات مساعد بر تعداد کل حالات یک تجربه به دست می‌آید، به نام احتمال نظری یاد می گردد.

$$\text{احتمال یک نتیجه یا حادثهٔ اتفاقی} = \frac{\text{تعداد حالات مساعد برای حادثهٔ اتفاقی}}{\text{تعداد کل حالات نتیجه‌های تجربه}}$$

تمرینات فصل هشتم

1- سؤالات زیر را با کار برد کلمات: ممکن است، ممکن نیست و حتمی است، جواب دهید.

- از آسمان ابری، باران می‌بارد.
- چانس دیدن ستاره‌ها روزانه ممکن نیست.
- شترمرغ پرواز می کند.
- گوسفند چوچه نمی‌دهد، تخم می دهد.

2- یک تجربهٔ تصادفی را مثال گفته، حوادث اتفاقی اولیه و چند حادثهٔ اتفاقی آن را مشخص کنید.

3- یک فضای نمونه که 4 حادثهٔ اولیهٔ اتفاقی داشته باشد، چند حادثهٔ اتفاقی دارد. با یک مثال واضح کرده و فهرست حوادث اتفاقی را بنویسید.

4- حادثهٔ اتفاقی مطمئن و ناممکن را در یک مثال تجربهٔ اتفاقی واضح سازید.

5- یک فضای نمونه چیست؟ با علامت (P) جواب صحیح را نشانی کنید.

(   )هر نتیجه یک تجربه فضای نمونه است.

(   )فضای نمونه نتیجه ندارد.

(   )ست تمام نتایج ممکن یک تجربه است.

(   )حادثهٔ مطمئن و ناممکن است.

6- در یک تجربهٔ تصادفی هر حادثهٔ اتفاقی .... (جواب درست را با (P) نشانی کنید.)

(   )یک عنصر فضای نمونه است.

(   )ست فرعی فضای نمونه است.

(   )در یک تجربهٔ تصادفی حادثهٔ اتفاقی چانس ندارد.

(   )ناممکن است.

7- در انداختن دو دانه سکه:

- فضای نمونه را تشکیل دهید.
- دریافت کنید احتمال آن که هر دو سکه شیر باشند.
- دریافت کنید احتمال آن که هر دو سکه خط باشند.
- در یافت کنید احتمال آن که هر دو سکه یکسان باشند.

8- در بین گلوله‌های مساوی که در یک خریطه قرار دارند و روی آن‌ها از 1 تا 100 شماره زده شده است، قرعه‌کشی می‌شود، دریافت کنید احتمال این که:

- عدد قرعهٔ برآمده قابل تقسیم بر 5 باشد.
- عدد قرعه جفت باشد.
- عدد قرعه بر 12 قابل تقسیم باشد.
- عدد سه‌رقمی باشد.
- عدد چهاررقمی باشد.